

**APLIKASI METODE TRANSFORMASI LAPLACE PADA  
DINAMIKA SISTEM FISIS-MASSA PEGAS DENGAN  
*SHOCK ABSORBER***



UNIVERSITAS ISLAM NEGERI  
**ALAUDDIN**  
MAKASSAR

**SKRIPSI**

**Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat Meraih Gelar.  
Sarjana Sains Jurusan Matematika  
Pada Fakultas Sains dan Teknologi  
UIN Alauddin Makassar**

**Oleh :**

**ASRIJAL**

**NIM. 60600111075**

**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI ALAUDDIN MAKASSAR  
2016**

## PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI

Dengan penuh kesadaran, penyusun yang bertanda tangan di bawah ini

Nama : Asrijal  
NIM : 60600111075  
Jurusan : Matematika  
Fakultas : Sains dan Teknologi

Menyatakan bahwa skripsi ini benar adalah hasil karya penyusun sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui hasil tulisan atau pikiran saya sendiri.

Jika dikemudian hari terbukti bahwa ia merupakan duplikat, tiruan, plagiat, atau dibuat oleh orang lain, sebagian atau seluruhnya, maka skripsi dan gelar yang diperoleh karenanya batal demi hukum.

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI  
**ALAUDDIN**  
M A K A S S A R

Makassar, 8 November 2016

Penyusun,



Asrijal

NIM: 60600111075

## PENGESAHAN SKRIPSI

Skripsi yang berjudul "Aplikasi Metode Transformasi Laplace pada Dinamika Sistem Fisis-Massa Pegas dengan Shock Absorber", yang disusun oleh Saudara **Asrijal**, Nim: **60600111075** Mahasiswa Jurusan Matematika pada Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Alauddin Makassar, telah diuji dan dipertahankan dalam sidang *munaqasyah* yang diselenggarakan pada hari Selasa tanggal **17 November 2016 M**, bertepatan dengan **17 Shafar 1438 H**, dinyatakan telah dapat diterima sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika (S.Mat.).

Makassar, 17 November 2016 M

17 Shafar 1437 H

### DEWAN PENGUJI

Ketua : Prof. Dr. H. Arifuddin Ahmad, M.Ag.  
Sekretaris : Ermawati, S.Pd., M.Si.  
Munaqisy I : Wahidah Alwi, S.Si., M.Si.  
Munaqisy II : Muh. Irwan, S.Si., M.Si.  
Munaqisy III : Dr. Hasyim Haddade, S.Ag., M.Ag.  
Pembimbing I : Irwan, S.Si., M.Si.  
Pembimbing II : Try Azisah Nurman, S.Pd., M.Pd.

(.....)  
(.....)  
(.....)  
(.....)  
(.....)  
(.....)  
(.....)

Diketahui oleh:

Dekan Fakultas Sains dan Teknologi  
UIN Alauddin Makassar



Prof. Dr. H. Arifuddin Ahmad, M.Ag.  
Nip. 19691205 199303 1 001

## ABSTRAK

**Nama Penyusun** : Asrijal  
**NIM** : 60600111075  
**Judul Skripsi** : Aplikasi Metode Transformasi Laplace Pada  
 Dinamika Sistem Fisis-Massa Pegas Dengan *Shock Absorber*

---

Banyak permasalahan fisika yang harus diselesaikan dengan menggunakan model matematika. Salah satu model matematika yang cukup penting adalah persamaan differensial. Persamaan diferensial seringkali muncul dalam permasalahan fisika yang mencoba menggambarkan keadaan kehidupan nyata. Salah satu contohnya dinamika sistem fisis-massa pegas dengan *shock absorber*.

Penelitian ini membahas bagaimana hasil penyelesaian persamaan diferensial Tak linier tak homogen Pada Dinamika Sistem Fisis-Massa Pegas Dengan *Shock Absorber* menggunakan metode Transformasi Laplace.

Tujuan penelitian ini mendapatkan hasil penyelesaian persamaan diferensial Tak linier tak homogen Pada Dinamika Sistem Fisis-Massa Pegas Dengan *Shock Absorber* menggunakan metode Transformasi Laplace.

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode Transformasi Laplace. Keunggulan Transformasi Laplace adalah bahwa masalah nilai awal persamaan diferensial Tak linier dapat diselesaikan secara langsung tanpa terlebih dahulu menentukan solusi umumnya atau persamaan diferensial tak homogen dapat diselesaikan tanpa terlebih dahulu menyelesaikan persamaan homogen. Misalkan  $F(t)$  suatu fungsi dari  $t$  yang ditentukan untuk  $t > 0$ . Maka Transformasi Laplace dari  $F(t)$ , yang dinyatakan oleh  $\mathcal{L}\{F(t)\}$ , didefinisikan sebagai  $\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$ . Transformasi Laplace dari  $F(t)$  dikatakan ada apabila integral konvergen untuk beberapa harga  $s$ , bila tidak demikian maka transformasi Laplace-nya tidak ada. Model atau persamaan yang telah didapatkan dari persamaan diferensial tak linear tak homogen pada sistem fisis-massa pegas *shock absorber*.

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + c \frac{dy}{dt} + ky = F_0 \cos \omega t$$

diperoleh solusi homogen  $y_h = e^{-t} \left( c_1 \cos\left(\frac{-c}{2m}\right) + c_2 t \sin\left(\frac{-c}{2m}\right) \right)$ , dan solusi homogen

$$y_p = \frac{4mt \cos(\omega t)}{(-c \pm \sqrt{c^2 - 4km})(F_0 + m)}$$

Untuk memperoleh solusi total  $y_t$  maka digabung  
 solusi umum  $y_h$  dengan solusi partikular  $y_p$

$$y_t = \left( c_1 \cos\left(\frac{-c}{2m}\right) e^{-t} + c_2 t \sin\left(\frac{-c}{2m}\right) e^{-t} \right) + \frac{4mt \cos(\omega t)}{(-c \pm \sqrt{c^2 - 4km})(F_0 + m)}$$

**Kata Kunci** : Persamaan diferensial, Sistem Fisis-Massa Pegas Dengan *Shock Absorber*, Transformasi Laplace.

## KATA PENGANTAR

*Assalamu'alaikum Wr. Wb.*

Dengan mengucapkan segala puji dan syukur kehadiran Allah SWT yang telah melimpahkan berkah, rahmat dan hidayah-Nya kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini dengan judul “Aplikasi Metode Transformasi Laplace Pada Dinamika Sistem Fisis-Massa Pegas Dengan *Shock Absorber*”.

Skripsi ini merupakan salah satu syarat yang harus ditempuh oleh mahasiswa Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Alauddin Makassar untuk meraih gelar Sarjana S-1 (Sarjana Sains).

Dalam menyelesaikan Skripsi ini penulis tidak dapat melakukan sendiri melainkan berkat bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu dengan segenap ketulusan hati penulis mengucapkan terima kasih sedalam-dalamnya kepada:

1. Allah SWT yang telah melimpahkan Rahmat dan KaruniaNya sehingga skripsi ini dapat terselesaikan.
2. Ayahanda yang tercinta Mustapen, Ibundaku yang aku sayangi Hj. Marhuna, Adindaku Irfandi dan Risma yang telah memberikan do'a dan dorongan moral dan material serta perhatian dan kasih sayang yang diberikan kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
3. Bapak Prof. Dr. Musafir Pababbari, M.Si Rektor UIN Alauddin Makassar
4. Bapak Prof. Dr. Arifuddin Ahmad, M.Ag. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Alauddin Makassar.

5. Bapak Irwan, S.Si.,M.Si.,Ketua Jurusan Sains Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Alauddin Makassar.
6. Ibu Wahida Alwi, S.Si., M.Si., Sekretaris Jurusan Sains Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Alauddin Makassar.
7. Bapak / Ibu pada Staf dan Pengajar Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Alauddin Makassar, yang telah memberikan do'a dan dorongan moral serta perhatian dan kasih sayang yang diberikan kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
8. BapakIrwan,S.Si.,M.Si.,pembimbing I yang telah bersedia meluangkan waktu dan penuh kesabaran untuk membimbing, mengarahkan serta memberikan petunjuk dalam penyusunan skripsi ini.
9. Ibu Try Azisah Nurman, S.Pd., M.Pd.,pembimbing II yang telah bersedia meluangkan waktu dan penuh kesabaran untuk membimbing, mengarahkan serta memberikan petunjuk dalam penyusunan skripsi ini.
10. Bapak Muh. Irwan, S.Si.,M.Si., penguji II yang telah bersedia meluangkan waktu untuk menguji, memberi saran dan kritikan untuk kesempurnaan penyusunan laporan ini.
11. Bapak Dr. Hasyim Haddade, S.Ag., M.Ag penguji III yang telah bersedia meluangkan waktu untuk menguji, memberi saran dan kritikan untuk kesempurnaan penyusunan laporan ini.
12. Teman-teman mahasiswa/mahasiswi Matematika 2011 yang telah banyak membantu pengerjaan skripsi ini, dan trimakasih atas semangat dan motivasinya.

13. Kepada teman-teman Asrama Putra Satu Soppeng yang turut serta dalam penyelesaian skripsi ini.

14. Semua pihak yang telah membantu dalam penyelesaian skripsi ini.

Semoga amal kebaikan yang telah diberikan mendapat balasan, pahala dan rahmat dari Allah SWT. Akhir kata, semoga Laporan ini dapat bermanfaat bagi penulis khususnya dan rekan-rekan Jurusan Matematika serta pembaca pada umumnya.

*Wassalamu'alaikum Wr. Wb.*

Makassar, November 2016

  
Penulis

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI  
**ALAUDDIN**  
M A K A S S A R

## DAFTAR ISI

	Hal.
HALAMAN JUDUL.....	i
PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI.....	ii
KATA PENGANTAR.....	iii
DAFTAR ISI.....	vi
DAFTAR SIMBOL.....	viii
DAFTAR GAMBAR.....	ix
ABSTRAK.....	x
<b>BAB I PENDAHULUAN.....</b>	<b>1</b>
A. Latar belakang.....	1
B. Rumusan masalah.....	9
C. Tujuan penelitian.....	9
D. Manfaat penelitian.....	9
E. Batasan masalah.....	10
F. Sistematika penulisan.....	11
<b>BAB II KAJIAN PUSTAKA.....</b>	<b>12</b>
A. Persamaan diferensial.....	12
B. Persamaan diferensial tak linear.....	16
C. Persamaan diferensial tak linier homogen Dengan koefisien konstan.....	19
D. Metode transformasi laplace.....	21
E. Integral parsial.....	28
F. Sistem fisis persamaan osilasi harmonik Teredam.....	29
G. Integrasi Ilmu Agama.....	42



	hal.
<b>BAB III METODOLOGI PENELITIAN.....</b>	<b>47</b>
A. Jenis Penelitian.....	47
B. Sumber Data.....	47
C. Waktu dan Lokasi Penelitian.....	47
D. Prosedur Penelitian.....	48
E. Flow chart.....	50
<b>BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN.....</b>	<b>51</b>
A. Hasil .....	51
B. Pembahasan.....	63
<b>BAB V PENUTUP.....</b>	<b>67</b>
C. Kesimpulan .....	67
D. Saran.....	68
<b>DAFTAR PUSTAKA.....</b>	<b>69</b>

## ABSTRAK

**Nama Penyusun** : Asrijal  
**NIM** : 60600111075  
**Judul Skripsi** : Aplikasi Metode Transformasi Laplace Pada  
 Dinamika Sistem Fisis-Massa Pegas Dengan *Shock Absorber*

---

Banyak permasalahan fisika yang harus diselesaikan dengan menggunakan model matematika. Salah satu model matematika yang cukup penting adalah persamaan differensial. Persamaan diferensial seringkali muncul dalam permasalahan fisika yang mencoba menggambarkan keadaan kehidupan nyata. Salah satu contohnya dinamika sistem fisis-massa pegas dengan *shock absorber*.

Penelitian ini membahas bagaimana hasil penyelesaian persamaan diferensial Tak linier tak homogen Pada Dinamika Sistem Fisis-Massa Pegas Dengan *Shock Absorber* menggunakan metode Transformasi Laplace.

Tujuan penelitian ini mendapatkan hasil penyelesaian persamaan diferensial Tak linier tak homogen Pada Dinamika Sistem Fisis-Massa Pegas Dengan *Shock Absorber* menggunakan metode Transformasi Laplace.

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode Transformasi Laplace. Keunggulan Transformasi Laplace adalah bahwa masalah nilai awal persamaan diferensial Tak linier dapat diselesaikan secara langsung tanpa terlebih dahulu menentukan solusi umumnya atau persamaan diferensial tak homogen dapat diselesaikan tanpa terlebih dahulu menyelesaikan persamaan homogen. Misalkan  $F(t)$  suatu fungsi dari  $t$  yang ditentukan untuk  $t > 0$ . Maka Transformasi Laplace dari  $F(t)$ , yang dinyatakan oleh  $\mathcal{L}\{F(t)\}$ , didefinisikan sebagai  $\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$ . Transformasi Laplace dari  $F(t)$  dikatakan ada apabila integral konvergen untuk beberapa harga  $s$ , bila tidak demikian maka transformasi Laplace-nya tidak ada. Model atau persamaan yang telah didapatkan dari persamaan diferensial tak linear tak homogen pada sistem fisis-massa pegas *shock absorber*.

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + c \frac{dy}{dt} + ky = F_0 \cos \omega t$$

diperoleh solusi homogen  $y_h = e^{-t} \left( c_1 \cos\left(\frac{-c}{2m}\right) + c_2 t \sin\left(\frac{-c}{2m}\right) \right)$ , dan solusi homogen

$$y_p = \frac{4mt \cos(\omega t)}{(-c \pm \sqrt{c^2 - 4km})(F_0 + m)}$$

Untuk memperoleh solusi total  $y_t$  maka digabung  
 solusi umum  $y_h$  dengan solusi partikular  $y_p$

$$y_t = \left( c_1 \cos\left(\frac{-c}{2m}\right) e^{-t} + c_2 t \sin\left(\frac{-c}{2m}\right) e^{-t} \right) + \frac{4mt \cos(\omega t)}{(-c \pm \sqrt{c^2 - 4km})(F_0 + m)}$$

**Kata Kunci** : Persamaan diferensial, Sistem Fisis-Massa Pegas Dengan *Shock Absorber*, Transformasi Laplace.

# **BAB I**

## **PENDAHULUAN**

### **A. Latar Belakang**

Ilmu agama dan ilmu sains termasuk ilmu yang sangat penting dalam kehidupan sehari-hari. Keduanya termasuk ilmu yang saling mendukung satu sama lain. Jika ilmu agama dalam setiap muslim tertanam kuat dalam jiwa serta pikirannya, amalan yang dilakukan pasti sesuai pandangan Allah Swt. Dilakukan secara maksimal. Ilmu agama dan ilmu sains memiliki keutamaan jika dipelajari secara maksimal. Keduanya saling mendukung artinya ilmu sains tetap membutuhkan ilmu agama dalam pelaksanaannya. Mulai dari pengkajian hingga pemanfaatan ilmu sains.

Setiap muslim memiliki kewajiban yang sama dalam menuntut ilmu agama. Tentu saja hal itu yang menjadikan diri seorang muslim mampu menguasainya dan mengamalkan dalam kehidupan sehari-hari. Ilmu agama dipelajari bukan hanya untuk dimanfaatkan oleh diri sendiri, tetapi juga untuk disampaikan kepada muslim lainnya. Apalagi agama islam termasuk agama yang sempurna ajaranNya, mulai dari masalah aqidah hingga syariat <sup>1</sup>. Ketika menuntut ilmu agama dan ilmu sains sangat tampak berpengaruh terhadap kehidupan pribadi manusia. Namun ketika manusia hendak memakai hasil dari ilmu sains, harus tetap mengacu pada boleh atau tidak menurut pandangan Allah Swt. Jika halal digunakan, maka setiap muslim dapat

---

<sup>1</sup> El-Mazni H.Aunur Rafiq, *Pengantar Studi Ilmu Al-qur'an* (Jakarta: Pustaka Al-Kausar, 2006), h. 3

memanfaatkannya secara maksimal dengan pengaturan yang baik. Sebaliknya jika haram, maka manusia tidak dapat memanfaatkannya.

Terkadang ilmu itu terdapat pada akal pikiran, terkadang pada ucapan, dan terkadang terdapat pada tulisan tangan. Sehingga ada ilmu yang sifatnya akal pikiran, ucapan dan ada yang berupa tulisan. Di dalam tulisan terkadang unsur akal pikiran dan ucapan, tetapi tidak berarti sebaliknya. Karena itu Allah Swt berfirman dalam surah Q.S. Al-Mujadilah (58 : 11)

يَا أَيُّهَا الَّذِينَ ءَامَنُوا إِذَا قِيلَ لَكُمْ تَفَسَّحُوا فِي الْمَجَالِسِ فَافْسَحُوا يَفْسَحِ اللَّهُ لَكُمْ وَإِذَا قِيلَ أَنْشُرُوا فَأَنْشُرُوا يَرْفَعِ اللَّهُ الَّذِينَ ءَامَنُوا مِنْكُمْ وَالَّذِينَ أُوتُوا الْعِلْمَ دَرَجَاتٍ وَاللَّهُ بِمَا تَعْمَلُونَ خَبِيرٌ

Terjemahnya:

"Hai orang-orang yang beriman apabila kamu dikatakan kepadamu: "Berlapang-lapanglah dalam majlis", Maka lapangkanlah niscaya Allah akan memberi kelapangan untukmu. dan apabila dikatakan: "Berdirilah kamu", Maka berdirilah, niscaya Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman di antaramu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat. dan Allah Maha mengetahui apa yang kamu kerjakan".<sup>2</sup>

Ayat ini menerangkan tentang perintah untuk memberi kelapangan dalam segala hal kepada orang lain. Ayat ini juga tidak menyebut secara tegas bahwa Allah Swt. akan meninggikan derajat orang yang berilmu. Tetapi menegaskan bahwa mereka memiliki derajat-derajat yakni yang lebih tinggi dari sekadar beriman, tidak disebutkan kata meninggikan itu sebagai isyarat bahwa sebenarnya

<sup>2</sup> Departemen Agama RI, *Al-Qur'an dan Terjemahnya*, (Bandung: PT. Sigma examedia arkanleema, 2009), h. 543

ilmu yang dimiliki itulah yang berperan besar dalam ketinggian derajat yang diperolehnya. Yang dimaksud dengan yang diberi pengetahuan adalah mereka yang beriman dan menghiasi diri mereka dengan pengetahuan. Ini berarti ayat di atas membagi kaum beriman jadi dua, yang pertama sekadar beriman dan beramal saleh, yang kedua beriman, beramal saleh serta memiliki pengetahuan. Derajat kedua kelompok ini menjadi lebih tinggi, bukan saja karena nilai ilmu yang disandangnya, tetapi juga amal dan pengajarannya kepada pihak lain baik secara lisan atau tulisan maupun keteladanan.<sup>3</sup>

Allah menciptakan alam semesta ini untuk kesejahteraan umat manusia. Manusia disuruh untuk mengelola alam ini agar dapat dimanfaatkan guna keperluan hidup mereka. Untuk mengelola alam ini tentu saja diperlukan akal. Allah menyuruh manusia menggunakan akalnya. Islam juga menghendaki umatnya untuk memiliki ilmu pengetahuan, baik ilmu pengetahuan agama maupun ilmu pengetahuan umum. Dalam pandangan Islam, ilmu itu tergolong suci. Ilmu merupakan barang yang sangat berharga bagi kehidupan seseorang, Ilmu itu bagaikan lampu atau cahaya. Bahwa tidak dapat seseorang berjalan di malam yang gelap, kecuali dengan lampu. Demikian pula halnya, tidak dapat seseorang membedakan yang baik dengan yang buruk, kecuali dengan ilmu<sup>4</sup>.

---

<sup>3</sup> Quraish, M. Shihab, *Tafsir Al-Mishbah; Pesan, Kesan Dan Keserasian Al-Qur'an*, (Jakarta: Lentera Hati, 2002), hlm. 79.

<sup>4</sup> Quraish, M. Shihab, *Tafsir Al-Mishbah; Pesan, Kesan Dan Keserasian Al-Qur'an*, (Jakarta: Lentera Hati, 2002), hlm. 180.

Sebagai contoh adalah ilmu pengetahuan bidang sains yang sangat berperan dan merupakan alat (*tools*) bagi disiplin ilmu bidang sains lainnya yakni matematika. Matematika itu pada dasarnya berkaitan dengan pekerjaan menghitung, sehingga tidak salah jika kemudian ada yang menyebut matematika adalah ilmu hitung atau *ilmu hisab*.

Oleh karena itu, sangat penting sekali bagi manusia untuk belajar matematika karena matematika memang ada dalam al-Quran, misalnya tentang penjumlahan, pengurangan, persamaan, ilmu faraidh, dan lain sebagainya. Dengan belajar matematika, selain untuk melatih dan menumbuhkan cara berpikir secara sistematis, logis, analitis, kritis, kreatif dan konsisten, juga diharapkan dapat menumbuhkan sikap teliti, cermat, hemat, jujur, tegas bertanggung jawab, sikap pantang menyerah dan percaya diri. Dalam masalah perhitungan, Sebagaimana dalam surat Q.S Al-Baqarah (2 : 202)



Terjemahnya:

“Mereka itulah orang-orang yang mendapat bahagian daripada yang mereka usahakan; dan Allah sangat cepat perhitungan-Nya”.<sup>5</sup>

Dengan keterbatasan manusia dalam menghitung sehingga banyak fenomena dalam kehidupan sehari-hari yang sulit diselesaikan secara langsung

---

<sup>5</sup>Departemen Agama RI, *Al-Qur'an dan Terjemahnya*, (Bandung: PT. Sigma examedia arkanleema, 2009), h. 31

sehingga dibutuhkan matematika sebagai alat bantu dalam menyelesaikan suatu masalah baik algoritma berfikir dari matematika, cara berhitung, ataupun hanya sebagai simbol-simbol untuk menyederhanakannya. Karena semakin hari semakin canggihnya ilmu pengetahuan dan teknologi yang ada, maka hampir semua masalah tersebut dapat diselesaikan. Salah satu disiplin yang dari zaman dahulu sampai sekarang yang masih unggul digunakan di kalangan berbagai disiplin ilmu lainnya adalah matematika.

Matematika merupakan ilmu pengetahuan dasar yang dibutuhkan semua manusia dalam kehidupan sehari-hari baik secara langsung maupun tidak langsung yang dapat digunakan sebagai alat bantu dalam menyelesaikan masalah, seperti cara berhitung ataupun hanya sebagai simbol-simbol yang menyederhanakannya. Akan tetapi seringkali juga ditemukan masalah-masalah dalam menyelesaikan model-model matematika. Beberapa model matematika yang ada, salah satunya adalah tentang persamaan diferensial.

Persamaan diferensial merupakan persamaan yang berkaitan dengan turunan suatu fungsi atau memuat suku-suku dari fungsi tersebut dan turunannya. Dengan melibatkan banyaknya variabel bebas, maka ada dua bentuk persamaan diferensial yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Persamaan diferensial biasa yaitu persamaan yang hanya melibatkan satu variabel bebas sedangkan persamaan diferensial parsial yaitu persamaan yang melibatkan

lebih dari satu variabel bebas <sup>6</sup>. Persamaan diferensial parsial dijumpai dalam kaitan dengan berbagai masalah fisik dan geometris. Bila fungsi yang terlibat tergantung pada dua atau lebih peubah bebas. Tidak berlebihan jika dikatakan bahwa hanya sistem fisik yang paling sederhana yang dapat dimodelkan dengan persamaan diferensial biasa mekanika fluida dan mekanika padat, transfer panas, teori elektromagnetik dan berbagai bidang fisika lainnya penuh dengan masalah-masalah yang harus dimodelkan dengan persamaan differensial parsial dan penyelesaian dari persamaan diferensial parsial itu sendiri.

Beberapa Penyelesaian dari persamaan differensial dapat dilakukan yang salah satunya dengan mengubah model ke bentuk integral. Berdasarkan penelitian yang dilakukan oleh Taehee Lee dan Hwajoon Kim <sup>7</sup>, "*The Representation of Energy Equation by Laplace Transform*" penelitian ini menjelaskan bagaimana mengubah atau merepresentasikan sebuah persamaan energi dengan laplace pada persamaan diferensial parsial dengan cara penyelesaian bentuk integral. Di dalam berbagai permasalahan fisika, matematika memegang peranan yang sangat penting.

Banyak permasalahan fisika yang harus diselesaikan dengan menggunakan model matematika. Salah satu model matematika yang cukup penting adalah persamaan differensial. Persamaan diferensial seringkali muncul dalam

---

<sup>6</sup> Nugroho Didit Budi, *Persamaan Diferensial Biasa dan Aplikasinya Penyelesaian Manual dan Menggunakan Maple* (Graha Ilmu: Yogyakarta, 2011), h. 1

<sup>7</sup> Lee, Taehee. *Int. Journal of Math. The Representation of Energy Equation by Laplace Transform*. Vol. 8, no. 22, 1093 – 1097(2014).



permasalahan fisika yang mencoba menggambarkan keadaan kehidupan nyata. Salah satu contohnya berdasarkan penelitian yang dilakukan oleh Urzula Ferdek<sup>8</sup> tentang “ *Modeling And Analysis Of A Twin-Tube Hydraulic Shock Absorber*”. Dalam penelitian ini, model fisik dan matematika diaplikasikan pada tabung kembar yang dikenal dengan *Shock Absorber*, proses kerja dari *Shock Absorber* menggunakan minyak sehingga mengakibatkan efek amplitude dan frekuensi eksitasi serta parameter menjelekaskan laju aliran minyak melalui katup, kemudian dibentuk karakteristiknya dari gaya redaman. Dari proses tersebut dibentuklah sebuah model yang kemudian diselesaikan dengan menggunakan metode numerik integrasi, sehingga model yang telah dibentuk dapat dianalisis.

Penelitian Urzula Ferdek membuktikan salah satu hukum alam pada bidang fisika yang kemudian diterjemahkan kedalam bentuk model matematika. Banyaknya hukum alam dan hipotesa yang dapat diterjemahkan ke dalam persamaan yang mengandung persamaan diferensial. Salah satu contoh selain penelitian oleh Urzula Ferdek adalah turunan-turunan dalam fisika muncul sebagai kecepatan dan percepatan, dalam geometri sebagai kemiringan. Keadaan inilah yang merupakan persoalan pada banyak kasus fisika, sehingga untuk memperoleh suatu persamaan diferensial yang melukiskan suatu persoalan dalam kehidupan nyata, biasanya diambil permisalan bahwa keadaan sebenarnya diatur oleh hukum-hukum yang sangat sederhana yang biasanya sering dibuat permisalan yang ideal.

---

<sup>8</sup> Ferdek Uzula. *Journal Of Theoretical and Applied Mechaniscs.*” *Modeling And Analysis Of A Twin-Tube Hydraulic Shock Absorber*. Vol 2. No.627-638 (2012).

Penelitian sebelumnya pada tahun 2013 oleh Mangara Tua berjudul “Aplikasi Fungsi Green Pada Dinamika Sistem Fisis-Massa Pegas Dengan *Shock Absorber*”<sup>9</sup>, dan pada penelitian oleh Meyriska pada tahun 2005 berjudul “Transformasi Laplace Dari Masalah Nilai Batas Pada Persamaan Diferensial Parsial”<sup>10</sup>, bahwa dinamika sistem fisis-massa pegas dengan *shock absorber* juga dapat diselesaikan dengan persamaan diferensial Tak linier tak homogen menggunakan metode lain. Salah satunya metode transformasi laplace pada penelitian yang dilakukan oleh Meyriska pada tahun 2005 tentang penyelesaian persamaan differensial parabolik menggunakan metode transformasi laplace.

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode Transformasi Laplace. Metode Transformasi Laplace (*Laplace Transformation*) merupakan salah satu metode yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial. Metode ini pertama kali diperkenalkan oleh *Pierre Simon Marquas De Laplace* seorang matematikawan Prancis dan seorang guru besar di Paris.

Keunggulan Transformasi Laplace adalah bahwa masalah nilai awal persamaan diferensial Tak linier dapat diselesaikan secara langsung tanpa terlebih dahulu menentukan solusi umumnya atau persamaan diferensial tak homogen dapat diselesaikan tanpa terlebih dahulu menyelesaikan persamaan homogenya.

---

<sup>9</sup> Mangara Tua. 2013. Skripsi Aplikasi Fungsi Green Pada Dinamika Sistem Fisis-Massa Pegas Dengan *Shock Absorber*. Medan : Universitas Sumatra Utara.

<sup>10</sup> Meyriska A.H. 2005. Transformasi Laplace Dari Masalah Nilai Batas Pada Persamaan Diferensial Parsial. Semarang: Universitas Negeri Semarang.

Keunggulan transformasi laplace banyak digunakan oleh peneliti dalam mengembangkan penelitian baik dibidang fisika, matematika, atau masalah keuangan (perbankan). Dr. N. A. Patil dan Vijaya N. Patil mengembangkan aplikasi laplace pada kasus keuangan atau perbankan<sup>11</sup> dari penelitian Patil menjelaskan penyelesaian solusi analitik dari sebuah investasi menggunakan transformasi laplace, dimana dari bentuk laplace digunakan sebuah fungsi turunan laplace dalam memperoleh keuntungan yang maksimal.

Sehingga dari beberapa peneliti yang telah mengembangkan tentang masalah persamaan diferensial, penggunaan bentuk fisika pada *shock absorber* dan transformasi laplace sehingga penulis termotivasi untuk mencoba menjelaskan dan menyelesaikan kepada pembaca mengenai dinamika sistem fisis-massa pegas dengan *shock absorber* pada persamaan diferensial Tak linier tak homogen dengan menggunakan metode Transformasi Laplace.

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka penulis mengambil judul **“Aplikasi Metode Transformasi Laplace Pada Dinamika Sistem Fisis-Massa Pegas Dengan *Shock Absorber*”**.

## **B. Rumusan Masalah**

Rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana hasil penyelesaian persamaan diferensial tak linier tak homogen pada Dinamika

---

<sup>11</sup> N. A. Patil, Vijaya N. Patil. *Global Journal of Science Frontier Research Mathematics and Decision Sciences. Application of Laplace Transform*. Volume 12 Issue 12.(2012).

Sistem Fisis-Massa Pegas Dengan *Shock Absorber* menggunakan metode Transformasi Laplace ?

### C. Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah mendapatkan hasil penyelesaian dari persamaan diferensial Tak linier tak homogen Pada Dinamika Sistem Fisis-Massa Pegas Dengan *Shock Absorber* menggunakan metode Transformasi Laplace.

### D. Manfaat Penelitian

Adapun beberapa manfaat yang diharapkan dari penelitian ini, diantaranya adalah:

#### 1. Bagi penulis

Untuk mengaplikasikan pengetahuan dan pemahaman penulis tentang persamaan diferensial Tak linier tak homogen dan mengembangkan wawasan ilmu yang telah dipelajari untuk mengkaji suatu persamaan diferensial Tak linier tak homogen khususnya dalam hal penerapan Dinamika Sistem Fisis-Massa Pegas Dengan *Shock Absorber* menggunakan metode Transformasi Laplace.

#### 2. Bagi pembaca

a. Memperoleh kontribusi pemikiran yang dapat digunakan dalam pengembangan Ilmu Matematika.

- b. Dapat dijadikan referensi tentang bagaimana cara menyelesaikan persamaan diferensial Tak linier tak homogen khususnya dalam hal penerapan Dinamika Sistem Fisis-Massa Pegas Dengan *Shock Absorber* menggunakan metode Transformasi Laplace.

### 3. Bagi kampus UIN Alauddin Makassar

Untuk menambah bahan kepustakaan yang dapat dijadikan sarana pengembangan wawasan keilmuan.

## E. Batasan Masalah

Dalam penulisan tugas akhir ini permasalahan hanya dibatasi pada :

1. Metode yang digunakan untuk menyelesaikan Dinamika Sistem Fisis-Massa Pegas Dengan *Shock Absorber* adalah metode Transformasi Laplace.
2. Masalah yang diselesaikan adalah persamaan diferensial Tak linier tak homogen sampai pada orde-2.

## F. Sistematika Penulisan

Agar penulisan tugas akhir ini tersusun secara sistematis, maka penulis memberikan sistematika penulisan sebagai berikut :

### BAB I Pendahuluan

Membahas tentang pendahuluan yang berisi latar belakang masalah, dimana latar belakang masalah ini dikemukakan dengan alasan penulis mengangkat

topik ini, rumusan masalah, batasan masalah untuk memfokuska pembahasan, tujuan penulisan proposal yang berisi tentang tujuan penulis membahas topik ini, manfaat penulisan ini, kajian yang digunakan penulis serta sistematika pembahasan.

## BAB II Kajian Teori

Teori pendukung yang berisi pokok-pokok kajian pustaka yang mendasari dan digunakan dalam penelitian, antara lain yang mencakup tentang persamaan diferensial, Dinamika Sistem Fisis-Massa Pegas Dengan *Shock Absorber*, metode Transformasi Laplace.

## BAB III Metode Penelitian

Membahas tentang persamaan diferensial Tak linier tak homogen orde- $n$  dan penelitian yang akan dilakukan oleh penulis adalah meliputi jenis penelitian yang digunakan, sumber data, waktu dan lokasi penelitian, serta prosedur penelitian.

## Bab IV Hasil dan Pembahasan

Pembahasan yang memuat tentang mengenai langkah-langkah dalam menyelesaikan persamaan diferensial Tak linier tak homogen Pada Dinamika Sistem Fisis-Massa Pegas Dengan *Shock Absorber* menggunakan metode Transformasi Laplace.

## Bab V Penutup

Penutup yang di dalamnya berisikan tentang kesimpulan dan saran-saran.

## DAFTAR PUSTAKA



## BAB II

### KAJIAN PUSTAKA

#### A. Persamaan diferensial

Persamaan diferensial (*differential equation*) adalah suatu persamaan yang melibatkan satu atau lebih turunan fungsi yang belum diketahui, dan persamaan itu juga mungkin melibatkan fungsi itu sendiri dan konstanta. Dari turunan yang membentuk dalam persamaan diferensial akan membentuk jenis dan klarifikasi persamaan diferensial itu sendiri.<sup>12</sup>

Persamaan diferensial biasa adalah suatu persamaan diferensial yang melibatkan hanya ada satu variabel bebas, jika diambil  $y(x)$  sebagai suatu fungsi satu variabel, dengan  $x$  dinamakan variabel bebas dan  $y$  dinamakan variabel tak bebas, maka persamaan diferensial biasa dapat dinyatakan dalam bentuk.<sup>13</sup>

$$f(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Persamaan ini menyatakan bahwa terdapat hubungan antara variabel bebas  $x$  dan variabel tak bebas  $y$  beserta derivatif-derivatifnya, dalam bentuk himpunan persamaan yang secara identik sama dengan nol.

---

<sup>12</sup> Prayudi, *Matematika Teknik Persamaan diferensial, Transformasi Laplace, Deret Fourier* (Yogyakarta: Graha Ilmu, 2006), h. 3

<sup>13</sup> Nugroho Didit Budi, *Persamaan Diferensial Biasa dan Aplikasinya Penyelesaian Manual dan Menggunakan Maple*, h. 1



Sebuah persamaan diferensial disebut mempunyai orde- $n$  jika orde turunan tertinggi yang terlibat adalah  $n$ , sedangkan jika turunan dengan orde tertinggi itu berderajat  $k$  maka persamaan itu dinamakan persamaan diferensial berderajat  $k$ .

#### Contoh 1

1.  $xy' + y = 3$
2.  $y''' + 2(y'') + y' = \cos x$
3.  $(y')^2 + (y')^2 + 3y = x^2$

Pada contoh 1, 2, dan 3 di atas, lambang  $y'$ ,  $y''$ , dan  $y'''$  berturut-turut menyatakan turunan pertama, turunan kedua, serta turunan ketiga dari fungsi  $y(x)$  terhadap  $x$ . Dengan kata lain  $y' = \frac{dy}{dx}$ ,  $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ , dan  $y''' = \frac{d^3y}{dx^3}$ .

Persamaan diferensial merupakan suatu hubungan yang dinamis, dengan kata lain kualitas-kualitas yang terlibat berubah, sehingga sering kali muncul dalam pemodelan fenomena yang menggambarkan perubahan variabel tak bebas terhadap perubahan variabel bebasnya.<sup>14</sup>

#### Contoh 2

1. Tinjau  $y = A \sin x + B \cos x$ , dimana  $A$  dan  $B$  adalah konstanta sembarang.

Jika diturunkan diperoleh:

---

<sup>14</sup> Bondan Alit, *Kalkulus Lanjut* (Yogyakarta: Graha Ilmu, 2007), h. 2-3

$$\frac{dy}{dx} = A \cos x - B \sin x$$

dan

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -A \sin x - B \cos x$$

Jika identik dengan persamaan semula, tapi tandanya berlawanan, artinya

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -y$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

Karena pangkat tertinggi turunannya adalah dua maka Ini adalah merupakan sebuah persamaan diferensial orde dua.

2. Bentuklah sebuah persamaan diferensial dari fungsi  $y = x + \frac{A}{x}$

Kita turunkan terhadap  $x$ , diperoleh bahwa

$$\frac{dy}{dx} = 1 - Ax^{-2} = 1 - \frac{A}{x^2}$$

Dari persamaan yang diperoleh,  $\frac{A}{x} = y - x$

$$A = x(y - x)$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{x(y - x)}{x^2}$$

$$= 1 - \frac{y - x}{x}$$

$$= \frac{x - y + x}{x}$$

$$= \frac{2x - y}{x}$$

$$x \frac{dy}{dx} = 2x - y$$

Karena diturunkan satu kali maka persamaan ini adalah persamaan orde pertama.

3. Bentuklah persamaan diferensial untuk  $y = Ax^2 + Bx$

Dari persamaan  $y = Ax^2 + Bx$

Kita turunkan terhadap  $x$  maka didapatkan

$$\frac{dy}{dx} = 2Ax + B$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2A \text{ atau } A = \frac{1}{2} \frac{d^2y}{dx^2}$$

Substitusi  $2A$  ke dalam  $\frac{dy}{dx} = 2Ax + B$ :

$$\frac{dy}{dx} = x \frac{d^2y}{dx^2} + B$$

$$B = \frac{dy}{dx} - x \frac{d^2y}{dx^2}$$

Dengan mensubstitusi  $A$  dan  $B$  ke dalam  $y = Ax^2 + Bx$ , maka kita peroleh:

$$y = x^2 \frac{1}{2} \frac{d^2y}{dx^2} + x \left( \frac{dy}{dx} - x \frac{d^2y}{dx^2} \right)$$

$$= \frac{x^2}{2} \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - x^2 \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$y = x \frac{dy}{dx} - \frac{x^2}{2} \frac{d^2y}{dx^2}$$

karena pangkat tertinggi turunannya adalah dua maka persamaan ini adalah persamaan orde kedua.

Persamaan diferensial parsial adalah persamaan yang memuat fungsi dari dua atau lebih peubah yang tidak diketahui dan turunan-turunan parsialnya terhadap peubah tersebut.<sup>15</sup> Maka suatu persamaan diferensial parsial dapat dinyatakan dalam bentuk :

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D = 0$$

Dengan  $A$ ,  $B$  dan  $C$  adalah fungsi dari  $x$  dan  $y$ , sedangkan  $D$  adalah fungsi dari  $x$ ,  $y$ ,  $u$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x}$  dan  $\frac{\partial u}{\partial y}$ . Bergantung dari nilai koefisien  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .<sup>16</sup>

Contoh 3

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = f(x, y)$$

Persamaan di atas merupakan suatu persamaan diferensial parsial dengan variabel bebas  $x$  dan  $y$  dan variabel tak bebas  $u$ .  $u$  merupakan yang akan dicari, sedangkan  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  dan  $F$  adalah fungsi dari  $x$  dan  $y$  yang diketahui.

## B. Persamaan Diferensial Tak Linier

Suatu persamaan diferensial dikatakan linier jika tidak ada perkalian antara variabel-variabel tak bebas dan derivatif-derivatifnya. Dengan kata lain, semua koefisiennya adalah fungsi dari variabel-variabel bebas.<sup>17</sup>

<sup>15</sup> Spiegel R. Murray, *Matematika Lanjut untuk Para Insinyur dan Ilmuwan Edisi S1* (Jakarta: Erlangga, 1983), h. 276.

<sup>16</sup> Setiawan Agus, *Pengantar Metode Numerik* (Yogyakarta: Andi, 2006), h. 211

Secara umum persamaan diferensial Tak linier orde- $n$  dituliskan sebagai:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = f(x) \quad (1)$$

di mana  $f(x)$  dan koefisien  $a_i(x)$ , dengan  $i = 0, 1, 2, \dots, n$  tergantung hanya pada variabel  $x$ . Dengan kata lain, persamaan-persamaan ini tidak tergantung pada  $y$  ataupun pada turunan dari  $y$ .<sup>18</sup>

Suatu persamaan diferensial biasa tingkat satu derajat satu adalah suatu persamaan yang memuat satu variabel bebas biasanya dinamakan  $x$ , satu variabel tak bebas biasanya dinamakan  $y$ , dan derivatif  $\frac{dy}{dx}$ . Persamaan diferensial tingkat satu secara umum dapat dituliskan seperti  $F(x, y, y') = 0$ , jika  $y' = \frac{dy}{dx}$ , maka  $F(x, y, y') = 0$  dapat ditulis

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \quad (2)$$

Persamaan (2) merupakan persamaan diferensial yang dinyatakan secara implisit. Persamaan (2) dapat dinyatakan secara eksplisit sebagai

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (3)$$

#### Contoh 4

1.  $\frac{1}{2} d(x^2 + y^2) = 0$  merupakan persamaan diferensial implicit
2.  $y \frac{dy}{dx} = x$  merupakan persamaan diferensial eksplisit.

---

<sup>17</sup>Nugroho Didit Budi, *Persamaan Diferensial Biasa dan Aplikasinya Penyelesaian Manual dan Menggunakan Maple*, h. 3

<sup>18</sup>Marwan dan Munsir Said, *Persamaan Diferensial* (Yogyakarta: Graha Ilmu, 2009), h.7

Persamaan diferensial tingkat dua secara umum dapat dituliskan seperti  $F(x, y, y', y'') = 0$ , dengan notasi yang jelas untuk persamaan tingkat tinggi, sehingga persamaan sering kali diasumsikan dapat diselesaikan untuk derivatif tertinggi dan dituliskan  $y'' = f(x, y, y')$ .

Contoh 5

1.  $1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 3 \frac{d^2y}{dx^2}$  adalah persamaan diferensial biasa tingkat dua derajat satu.

2.  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0$  adalah persamaan diferensial biasa tingkat dua derajat dua.

Orde atau tingkat dari suatu persamaan diferensial ditentukan oleh tingkat derivatif yang tertinggi yang terdapat pada persamaan tersebut, sedangkan Derajat / pangkat dari suatu persamaan diferensial adalah pangkat dari derivatif yang mempunyai tingkat tertinggi dari persamaan tertentu

Bentuk umum persamaan diferensial orde dua yaitu :

$$y'' + a y' + b y = f(x) \quad (4)$$

Jika  $f(x) = 0$  maka persamaan diferensial di atas persamaan diferensial homogen, sedangkan jika  $f(x) \neq 0$  maka dinamakan persamaan diferensial tak homogen.<sup>19</sup>

---

<sup>19</sup> Nugroho Didit Budi, *Persamaan Diferensial Biasa dan Aplikasinya Penyelesaian Manual dan Menggunakan Maple*, h. 4-12.

### Contoh 6

1. Persamaan diferensial  $xy'' + y' \sin x + 3y = 0$  adalah persamaan diferensial Tak linier orde dua homogen karena  $f(x) = 0$ .
2. Persamaan diferensial  $xy'' + x^2y' + 4y = \sin x$  adalah persamaan diferensial orde dua tak homogen karena  $f(x) \neq 0$ .

### C. Persamaan Diferensial Tak linier Homogen dengan Koefisien Konstan

Persamaan diferensial homogen orde- $n$  dengan koefisien konstan, persamaaan yang mempunyai bentuk umum:

Persamaan linear orde  $n$  dengan koefisien konstan

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 = 0 \quad (5)$$

dengan  $a_n \neq 0$ .<sup>20</sup>

Dalam menentukan solusi persamaan diferensial homogen dilakukan hal berikut :

Misalkan  $y = e^{rx}$  merupakan solusi persamaan diferensial homogen yaitu  $ay'' + by' + cy = 0$ . Dengan mensubstitusikan solusi tersebut dan turunannya ke dalam persamaan diferensial didapatkan :

$$y' = re^{rx}$$

$$y'' = r^2 e^{rx}$$

---

<sup>20</sup>Mohamed Amine Khamisi .([http : / / www.sosmath.com / differentia l/ equation / byparts / byparts . html](http://www.sosmath.com/differentia1/equation/byparts/byparts.html) ). diakses tanggal 2 januari 2013

Sehingga diperoleh,

$$a(y)'' + b(y)' + c(y) = 0$$

$$a(e^{rx})'' + b(e^{rx})' + c(e^{rx}) = 0$$

$$a(r^2 e^{rx}) + b(re^{rx}) + c(e^{rx}) = 0$$

$$(ar^2 e^{rx}) + (bre^{rx}) + (ce^{rx}) = 0$$

$$e^{rx}(ar^2 + br + c) = 0$$

Sebab  $e^{rx} \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ , maka  $ar^2 + br + c = 0$  disebut persamaan karakteristik dari persamaan diferensial.<sup>21</sup> Akar persamaan karakteristik dari persamaan diferensial adalah :

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{dan} \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \quad \quad \quad = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

Kemungkinan nilai  $r_1$  dan  $r_2$  bergantung dari nilai  $D$ , yaitu :

- a. Bila  $D > 0$  maka  $r_1 \neq r_2$  (akar real dan berbeda)

Jika akar-akar persamaan karakteristik adalah riil dan semuanya berbeda, maka solusi persamaan  $e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \dots, e^{r_n x}$  merupakan bilangan real dan berbeda,  $r_1 \neq r_2$ . Maka

$$y_1 = e^{r_1 x} \text{ dan } y_2 = e^{r_2 x}$$

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$$

---

<sup>21</sup>Danang Mursita, *Matematika untuk Perguruan Tinggi*. (Bandung:Rekayasa Sains.2011), h.234



$$= c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \cdots + c_n e^{r_n x} \quad (6)$$

Dimana  $e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \dots, e^{r_n x}$  bebas linear pada interval  $-\infty < x < \infty$

Contoh 7 :

Tentukan solusi umum (solusi homogen) persamaan diferensial :

$$2y''' - 4y'' - 2y' + 4y = 0.$$

Jawab :

Untuk penyederhanaan, bagilah persamaan tersebut dengan 2, diperoleh

$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$  substitusikan  $y = e^{rx}$ , diperoleh persamaan karakteristik, yaitu :

$$\begin{aligned} r^3 - 2r^2 - r + 2 &= 0 \\ (r+1)(r-1)(r-2) &= 0 \end{aligned}$$

akar - akarnya adalah :  $r_1 = -1, r_2 = 1$ , dan  $r_3 = 2$ . Jadi solusi umumnya adalah

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + c_3 e^{2x}$$

b. Bila  $D < 0$  maka  $m_1, m_2$  merupakan bilangan kompleks (imajiner)

Jika persamaan karakteristik mempunyai akar-akar kompleks, maka akar-akar kompleks tersebut mempunyai bentuk  $\lambda \pm i\mu$ . Jika tidak ada akar yang sama, maka

solusi umumnya (solusi homogen) adalah  $y_h = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \cdots + c_n e^{r_n x}$ . Sehingga

solusi kompleks  $e^{(\lambda+i\mu)x}$  dan  $e^{(\lambda-i\mu)x}$ , yang mempunyai solusi riilnya

$e^{\lambda x} \cos \mu x, e^{\lambda x} \sin \mu x$ . Jadi, solusi umum (solusi homogen) persamaan diferensial yang

mempunyai akar-akar kompleks adalah kombinasi linear dari solusi-solusinya, atau

$$y_h = c_1 e^{\lambda x} \cos \mu x + c_2 e^{\lambda x} \sin \mu x \quad (7)$$

Contoh 8 :

Tentukan solusi umum (solusi homogen) persamaan diferensial  $y^{iv} - y = 0$ .

Jawab :

Substitusikan  $y = e^{rx}$ , diperoleh persamaan karakteristik, yaitu :

$$\begin{aligned} r^4 - 1 &= 0 \\ (r^2 - 1)(r^2 + 1) &= 0 \end{aligned}$$

Untuk mendapatkan nilai  $r_1, r_2$  digunakan rumus  $abc$  dimana  $a = 1, b = 0$ , dan  $c = -1$

$$\begin{aligned} (r^2 - 1) &= 0 \\ r_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

$$r_{1,2} = \frac{\pm \sqrt{-4(1)(-1)}}{2(1)}$$

$$r_{1,2} = \frac{\pm \sqrt{4}}{2}$$

$$r_{1,2} = \pm 1$$

Untuk mendapatkan nilai  $r_3, r_4$  digunakan rumus  $abc$  dimana  $a = 1, b = 0$ , dan  $c = 1$

$$(r^2 + 1) = 0$$

$$r_{3,4} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$r_{3,4} = \frac{\pm \sqrt{-4(1)(1)}}{2(1)}$$

$$r_{1,2} = \frac{\pm \sqrt{-4}}{2}$$

$$r_{1,2} = \frac{\pm \sqrt{-1}\sqrt{4}}{2}$$

$$r_{1,2} = \pm i(1)$$

$$r_{1,2} = \pm i$$

Jadi akar-akarnya adalah  $r_1 = 1, r_2 = -1, r_3 = i$  dan  $r_4 = -i$

Jadi solusi umumnya adalah  $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + c_3 \cos x + c_4 \sin x$

c. Bila  $D = 0$  maka  $m_1 = m_2$  (akar real dan sama)

Jika persamaan karakteristik mempunyai akar-akar yang sama, maka solusi umumnya tidak lagi mempunyai bentuk seperti persamaan (6), tetapi mempunyai bentuk berikut :  $e^{r_1 x}, x e^{r_1 x}, x^2 e^{r_1 x}, \dots, x^{s-1} e^{r_1 x}$ . Jika akar-akarnya berulang sebanyak  $s$  kali ( $s \leq n$ ), maka solusi umum (solusi homogen) persamaan (6) adalah

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 x e^{r_1 x} + \dots + c_n x^{s-1} e^{r_1 x} \quad (8)$$

Jika akar-akar kompleks berulang sebanyak  $s$  kali, maka solusi umumnya adalah<sup>22</sup> :

$$y = c_1 e^{\lambda x} \cos \mu x + c_2 e^{\lambda x} \sin \mu x + c_3 x e^{\lambda x} \cos \mu x + c_4 x e^{\lambda x} \sin \mu x + \dots +$$

---

<sup>22</sup> Heris Herdiana. *Persamaan Diferensial*. Bandung:Pustaka.2011, h.154-157

$$c_n x^{s-1} e^{\lambda x} \cos \mu x + c_n x^{s-1} e^{\lambda x} \sin \mu x \quad (9)$$

Contoh 9 :

Tentukan solusi umum (solusi homogen) persamaan diferensial:

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0.$$

Jawab :

Persamaan karakteristiknya adalah :  $r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0$  yang mempunyai akar yang sama yaitu 1. Jadi solusi umumnya adalah :  $y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x$ .<sup>23</sup>

#### D. Persamaan Diferensial Tak linier Tak Homogen dengan Koefisien Konstan

Persamaan Diferensial Tak Linear Tak Homogen adalah persamaan diferensial yang mempunyai bentuk

$$(ax + by + c)dx + (px + qy + r)dy = 0 \quad (10)$$

dengan  $a, b, c, p, q, r$  adalah konstanta.

Untuk menyelesaikan PD tersebut, terlebih dahulu harus perhatikan kemungkinan-kemungkinan yang terjadi, yaitu :

1. Jika  $\frac{a}{p} \neq \frac{b}{q} \neq \frac{c}{r}$  atau  $aq - bp \neq 0$
2. Jika  $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} \neq \frac{c}{r}$  atau  $aq - bp = 0$

---

<sup>23</sup>Nugroho Didit Budi, *Persamaan Diferensial Biasa dan Aplikasinya Penyelesaian Manual dan Menggunakan Maple*, h. 107-108.

3. Jika  $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r} = m$

Terdapat kemungkinan bahwa akar-akar yang muncul di ruas kanan pada persamaan tersebut adalah lebih dari sekali. Untuk setiap akar dihitung berapa kali muncul di ruas kanan persamaan dan bilangan tersebut dinamakan dengan kerangkapan (*multiplicity*).

### Defenisi 6

Bentuk umum persamaan diferensial orde dua yaitu :

$$y'' + a y' + b y = f(x) \quad (11)$$

jika  $f(x) = 0$  maka persamaan diferensial di atas persamaan diferensial homogen, sedangkan jika  $f(x) \neq 0$  maka dinamakan persamaan diferensial tak homogen.<sup>24</sup>

### Contoh 10

1. Persamaan diferensial  $xy'' + y' \sin x + 3y = 0$  adalah persamaan diferensial Non linier orde dua homogen karena  $g(x) = 0$ .
2. Persamaan diferensial  $xy'' + x^2y' + 4y = \sin x$  adalah persamaan diferensial orde dua tak homogen karena  $g(x) \neq 0$ .

---

<sup>24</sup> Nugroho Didit Budi, *Persamaan Diferensial Biasa dan Aplikasinya Penyelesaian Manual dan Menggunakan Maple*, h. 4-12.

### E. Metode Transformasi Laplace

Misalkan  $F(t)$  suatu fungsi dari  $t$  yang ditentukan untuk  $t > 0$ . Maka Transformasi Laplace dari  $F(t)$ , yang dinyatakan oleh  $\mathcal{L}\{F(t)\}$ , didefinisikan sebagai

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} f(t) dt \quad (12)$$

Transformasi Laplace dari  $F(t)$  dikatakan ada apabila integral (12) konvergen untuk beberapa harga  $s$ , bila tidak demikian maka transformasi Laplace-nya tidak ada.<sup>25</sup>

#### Teorema 1

Jika  $F(t)$  adalah kontinu secara sebagian-sebagian dalam setiap selang berhingga  $0 \leq t \leq N$  dan eksponensial berorde  $\gamma$  untuk  $t > N$ , maka Transformasi Laplace-nya  $f(s)$  ada untuk semua  $s > \gamma$ .<sup>26</sup>

Bukti :

Untuk setiap bilangan positif  $N$  kita peroleh

$$\int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt = \int_0^N e^{-st} F(t) dt + \int_N^{\infty} e^{-st} F(t) dt$$

---

<sup>25</sup> Prayudi, *Matematika Teknik Persamaan diferensial, Transformasi Laplace, Deret Fourier*, h. 234

<sup>26</sup> Spiegel R. Murray, *Teori dan Soal-Soal Transformasi Laplace* (Jakarta: Erlangga, 1999), h. 1-2

Karena  $F(t)$  kontinu secara sebagian-sebagian dalam setiap selang terbatas  $0 \leq t \leq N$ , hingga integral pertama dari ruas kanan ada dan integral kedua di ruas kanan ada.

Misalkan  $F(t)$  adalah  $e^{\gamma t}$  (eksponensial berorde  $\gamma$  untuk  $t > N$ ) karena fungsi  $e^{\gamma t}$  merupakan fungsi non linear.

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt &\cong \int_0^{\infty} (e^{-st} F(t)) dt \\ &\cong \int_0^{\infty} (e^{-st} e^{\gamma t}) dt \end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (12), maka

$$\begin{aligned} \cong \int_0^{\infty} (e^{-st} e^{\gamma t}) dt &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{\gamma t} e^{-st} dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-(s-\gamma)t} dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{s-\gamma} e^{-(s-\gamma)t} \right]_0^b \\ &= -\frac{1}{s-\gamma} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{e^{-(s-\gamma)t}} \right]_0^b \\ &= -\frac{1}{s-\gamma} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{e^{-(s-\gamma)t}} \right]_0^b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{s-\gamma} \cdot (0-1) \\
 &= \frac{1}{s-\gamma}
 \end{aligned}$$

Jadi transformasi Laplace ada untuk  $s > \gamma$ .

#### Contoh 10

Dengan menggunakan definisi, tentukanlah transformasi Laplace,  $F(s) = \mathcal{L}\{f\}$ , dengan fungsi-fungsi berikut:

1.  $F(t) = e^{at}$ , dengan  $t \geq 0$  dan  $a$  konstanta tak nol
2.  $F(t) = t$ ,

Penyelesaian:

1. Bila  $F(t) = e^{at}$ , menurut definisi transformasi Laplace untuk fungsi  $F(t) = e^{at}$  diberikan oleh:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{e^{at}\} &= \int_0^{\infty} e^{at} e^{-st} dt \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{at} e^{-st} dt \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-(s-a)t} dt \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{s-a} e^{-(s-a)t} \right]_0^b \\
 &= -\frac{1}{s-a} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{e^{-(s-a)t}} \right]_0^b
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{s-a} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{e^{-(s-a)t}} \right]_0^b \\
&= -\frac{1}{s-a} \cdot (0 - 1) \\
&= \frac{1}{s-a}
\end{aligned}$$

2. Bila  $F(t) = t$  menurut definisi transformasi Laplace dari  $t$  diberikan oleh:

$$L\{F(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} t \, dt$$

Dimisalkan  $u = t \, dt$  maka  $du = dt$

Dimisalkan  $dv = e^{-st} \, dt$  maka  $v = \int e^{-st} \, dt$

$$v = -\frac{1}{s} e^{-st}$$

maka

$$= uv - \int v \, du$$

$$= \lim_{p \rightarrow \infty} \left( -t \frac{1}{s} e^{-st} \right) - \int_0^p e^{-st} \, dt$$

$$= -\frac{1}{s} \lim_{p \rightarrow \infty} \left[ t e^{-st} + \frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^p$$

$$= -\frac{1}{s} \lim_{p \rightarrow \infty} \left[ p e^{-sp} + \frac{1}{s} e^{-sp} \right] - \left[ 0 e^0 + \frac{1}{s} e^0 \right]_0^p$$

$$= -\frac{1}{s} \left[ (0 + 0) - \left( 0 + \frac{1}{s} \right) \right]$$

$$= -\frac{1}{s} \left( 0 - \frac{1}{s} \right)$$

$$= \frac{1}{s^2}$$

#### A. Sifat-Sifat Transformasi Laplace

Adapun sifat-sifat Transformasi Laplace adalah sebagai berikut:

##### 1. Terbatas Eksponensial

Fungsi  $f(t)$  disebut terbatas eksponensial pada interval  $[a, b]$  bila terdapat bilangan real  $M$  dan  $r$  sehingga berlaku  $|f(t)| \leq Me^{rt}$  untuk setiap  $t \in [a, b]$ .

##### 2. Sifat Keberadaan Transformasi Laplace.

Transformasi Laplace dari  $f(t)$  dengan  $t \geq 0$  ada bila  $f(t)$  kontinu bagian demi bagian dan terbatas eksponensial untuk  $t \geq 0$ .

##### 3. Sifat Ketunggalan Transformasi Laplace.

Transformasi Laplace dari suatu fungsi adalah tunggal yaitu bila  $F_1(s)$  dan  $F_2(s)$  merupakan Transformasi Laplace dari  $f(t)$  maka  $F_1(s) = F_2(s)$ .

##### 4. Sifat Linier Transformasi Laplace.

Dengan menggunakan definisi (6) didapatkan bahwa Transformasi Laplace mempunyai sifat linier,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(a f(t) + b g(t)) &= \int_0^{\infty} e^{-st} (a f(t) + b g(t)) dt \\ &= a \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt + b \int_0^{\infty} e^{-st} g(t) dt \quad (13) \\ &= a F(s) + b G(s) \end{aligned}$$

Invers dari Transformasi Laplace juga mempunyai sifat linier, karena:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^{-1} (c F(s) + d G(s)) &= \mathcal{L}^{-1} (\mathcal{L} (c f(t) + d g(t))) \\
 &= c f(t) + d g(t) \\
 &= c \mathcal{L}^{-1} (F(s)) + d \mathcal{L}^{-1} (G(s)).^{27}
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

### 1. Invers Transformasi Laplace

Jika transformasi Laplace suatu fungsi  $f(t)$  adalah  $F(s)$ , yaitu  $\mathcal{L} \{f(t)\} = F(s)$ , maka  $f(t)$  disebut invers transformasi Laplace dari  $F(s)$  dan ditulis:

$$\mathcal{L}^{-1} \{F(s)\} = f(t),$$

Dengan  $\mathcal{L}^{-1}$  dinamakan operator transformasi Laplace invers.

Fungsi invers transformasi Laplace tunggal. Berikut diberikan pada teorema berikut.

#### Teorema 2

Jika  $f$  dan  $g$  fungsi kontinu untuk  $t \geq 0$  dan mempunyai transformasi Laplace  $F$  maka  $f(t) = g(t)$  untuk setiap  $t \geq 0$ .<sup>28</sup>

Bukti:

Sifat transformasi Laplace juga berlaku pada invers transformasi Laplace. Suatu transformasi Laplace misalkan  $F(s)$  dinyatakan

$$F(s) = f_1(s) + f_2(s) + \dots + f_n(s)$$

<sup>27</sup> Mursita Danang, *Matematika Lanjut untuk Perguruan Tinggi*, h. 3

<sup>28</sup> Nugroho Didit Budi, *Persamaan Diferensial Biasa dan Aplikasinya Penyelesaian Manual dan Menggunakan Maple*, h. 154-155

andaikan  $f_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{f_1(s)\}$ ,  $f_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\{f_2(s)\}$ , ...,  $f_n(t) = \mathcal{L}^{-1}\{f_n(s)\}$

maka fungsi  $f(t) = f_1(t) + f_2(t) + \dots + f_n(t)$  mempunyai transformasi yaitu  $F(s)$ . Dengan menggunakan sifat ketunggalan di peroleh:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} + \mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\} + \dots + \mathcal{L}^{-1}\{F_n(s)\}$$

Jadi, invers transformasi Laplace  $\mathcal{L}^{-1}$  juga merupakan operator linier.

## 2. Menyelesaikan Partial Fraction dari Transformasi Laplace

Di dalam penggunaannya, transformasi laplace seringkali melibatkan bentuk  $\frac{Q(s)}{P(s)}$  dengan banyak fraksi, dimana  $P(s)$  dan  $Q(s)$  merupakan suku polinomia. Oleh karenanya, terlebih dahulu dipelajari bagaimana fraksi-fraksi yang terlibat atau dihasilkan diubah ke fraksi pecahan (*partial fraction*) agar didapatkan solusi dari persamaan diferensial bias. Jadi, terlebih dahulu dipelajari bagaimana menggunakan partial fraction sebelum memecahkan persamaan diferensial biasa.

Mengubah Fraction menjadi partial fraction

Jika:

$$\frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{a_1}{(s-a_1)} + \frac{a_2}{(s-a_2)} + \dots + \frac{a_n}{(s-a_n)}$$

Dengan  $P(s) = (s-a_1)(s-a_2)\dots(s-a_n)$

Maka terdapat tiga kemungkinan dari  $P(s)$

- $P(s)$  akar-akarnya riil dan berbeda. Tuliskan masing factor  $P(s)$ , dan tambahkan koefisien yang sesuai (A, B, dst) pada bagian pembilang

Contoh 11:

$$1. \frac{s+1}{s^2-4s+3} = \frac{A}{(s-1)} + \frac{B}{(s-3)}$$

$$2. \frac{1}{(s-2)(s+1)} = \frac{A}{(s-2)} + \frac{B}{(s+1)}$$

b.  $P(s)$  akar-akarnya riil dan sama, yaitu  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ . Jika

$$\frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{a_1}{(s-a_1)^n}$$

Maka uraian menjadi:

$$\frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{a_1}{(s-a_1)} + \frac{a_2}{(s-a_1)^2} + \dots + \frac{a_k}{(s-a_k)} + \frac{a_{k-1}}{(s-a_{k-1})} + \dots + \frac{a_n}{(s-a_n)}$$

Contoh 12:

$$\frac{1}{s^2+6s+9} = \frac{1}{(s+3)^2} = \frac{A}{(s+3)} + \frac{B}{(s+3)^2}$$

c. Jika akar-akarnya merupakan pasangan bilangan kompleks

$$a_1 = a + bi, a_2 = a - bi$$

$$\frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{A + Bs}{(s+a)^2 + b^2} + \frac{a_3}{(s-a_3)} + \dots + \frac{a_n}{(s-a_n)}$$

Contoh 13:

$$\frac{1}{s^3+s^2-2} = \frac{1}{(s-1)(s^2+2s+2)}$$

Cara perhitungan Transformasi Laplace dengan pengintegralan, sangat memakan waktu. Untuk dapat memanfaatkan Transformasi Laplace ini, terdapat tabel Transformasi Laplace seperti pada Tabel 1.

Tabel 1. *Transformasi Laplace dari Beberapa Fungsi*

No.	$f(t)$	$F(s)$
1.	$\delta(t)$	1
2.	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
3.	$t$	$\frac{1}{s^2}$
4.	$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$
5.	$te^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
6.	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
7.	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
8.	$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
9.	$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
10.	$\frac{1}{b-a} (e^{-at} - e^{-bt})$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$

## F. Integral Parsial

Fungsi integran yang pengintegralannya tidak dapat dibawa ke bentuk dasar. Salah satu cara untuk penyelesaiannya dengan metode integral parsial.<sup>29</sup>

Jika  $u$  dan  $v$  adalah fungsi, aturan perkaliannya menghasilkan

$$DD_x(uv) = uv' + vu'_x(uv) = uv' + vu'$$

yang dapat ditulis kembali dalam istilah antiturunan sebagai berikut :

$$uv = \int uv' dx + \int vu' dx$$

Sekarang,  $\int uv' dx$  dapat ditulis sebagai  $\int u dv$  dan  $\int vu' dx$  dapat ditulis sebagai  $\int v du$ . Untuk  $\int uv' dx = \int u dv$ , dimana setelah integrasi di sebelah kanan, variabel  $v$  diganti dengan fungsi yang bersesuaian dari  $x$ . Sebenarnya, menurut aturan rantai  $D_x\left(\int u dv\right) = D_v\left(\int u dv\right)$ .  $D_x v = uv'$ . Maka,  $\int u dv = \int uv' dx$ . Secara serupa  $\int v du = \int vu' dx$ . Jadi,  $uv = \int u dv + \int v du$  dan karena itu,

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (\text{integrasi parsial})$$

Tujuan integrasi parsial adalah untuk menggantikan integrasi yang “sulit”

$\int u dv$  dengan integrasi yang “mudah”  $\int v du$ .<sup>30</sup>

<sup>29</sup>Wikaria Gazali dan Soedadyatmodjo. *Kalkulus*. Yogyakarta : Graha Ilmu. 2007.h.147

<sup>30</sup> Frank Ayres, JR. *Kalkulus Edisi Empat*. (Jakarta:Penerbit Erlangga.1999),h.178-179

**Contoh 14 :** Tentukan  $\int x \ln x dx$ .

Untuk menggunakan rumus integrasi integral parsial, kita harus membagi integran  $x \ln x dx$  menjadi dua “bagian”  $u$  dan  $dv$  sehingga kita dapat dengan mudah menentukan  $v$  dengan integrasi dan juga dengan mudah menentukan  $\int v du$ . Dalam contoh ini, dimisalkan  $u = \ln x$  dan  $dv = x dx$ . Kemudian kita dapat menetapkan  $v = \frac{1}{2} x^2$  dan catatan bahwa  $du = \frac{1}{x} dx$ . Jadi, rumus integrasi parsial menghasilkan :

$$\begin{aligned}
 u &= \ln x & dv &= x dx \\
 du &= \frac{1}{x} dx & v &= \frac{1}{2} x^2 \\
 \int x \ln x dx &= \int u dv = uv - \int v du \\
 &= (\ln x) \left( \frac{1}{2} x^2 \right) - \int \frac{1}{2} x^2 \left( \frac{1}{x} dx \right) \\
 &= \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x dx \\
 &= \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C \\
 &= \frac{1}{4} x^2 (2 \ln x - 1) + C
 \end{aligned}$$

Pada baris pertama, kita menempatkan  $u$  dan  $dv$ . Pada baris kedua, kita menempatkan  $u$  dan  $dv$ . Hasil yang dikehendaki dari rumus integral parsial  $uv - \int v du$  dapat diperoleh dengan pertama-tama mengalikan sudut kiri atas  $u$



dengan sudut kanan bawah  $v$ , dan kemudian mengurangkan integral perkalian

$v du$  dari dua masukan  $v$  dan  $du$  pada baris kedua.

**Contoh 15 :** Tentukan  $\int xe^x dx$ .

Misalkan  $u = x$  dan  $dv = e^x dx$ . Kita dapat menggambarannya di bawah ini :

$$\begin{array}{ll} u = x & dv = e^x dx \\ du = dx & v = e^x \end{array}$$

Maka,

$$\begin{aligned} \int xe^x dx &= uv - \int v du \\ &= xe^x - \int e^x dx \\ &= xe^x - e^x + C \\ &= e^x(x-1) + C \end{aligned}$$

### G. Sistem Fisis Persamaan Osilasi Harmonik Teredam

Saat ini masih banyak anggapan bahwa tidak ada gaya gesekan yang bekerja pada osilator. Jika anggapan ini dipegang, maka bandul atau beban pada pegas akan berosilasi terus menerus. Pada kenyataannya, amplitudo osilasi berkurang sedikit demi sedikit sampai akhirnya menjadi nol karena pengaruh gesekan. Dikatakan bahwa gerakan teredam oleh gesekan dan disebut osilasi teredam. Gesekan seringkali muncul dari gesekan udara atau gaya dalam. Besar gaya gesekan biasanya bergantung kepada laju. Dalam banyak hal, gaya gesekan sebanding dengan kecepatan, tetapi

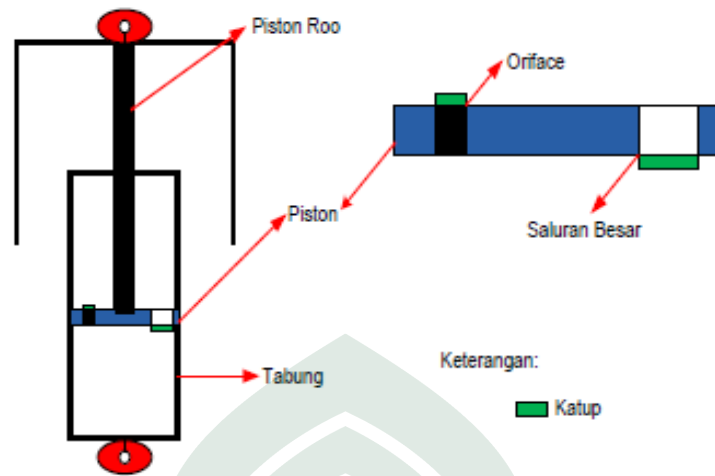
arahnya berlawanan. Contoh dari osilasi teredam misalnya adalah pada shock absorber mobil.

*Shock absorber* merupakan komponen penting suatu kendaraan yaitu dalam sistem suspensi, yang berguna untuk meredam gaya osilasi dari pegas. Shock absorber berfungsi untuk memperlambat dan mengurangi besarnya getaran gerakan dengan mengubah energi kinetik dari gerakan suspensi menjadi energi panas yang dapat dihamburkan melalui cairan hidrolik.

Peredam kejut (*shock absorber*) pada mobil memiliki komponen pada bagian atasnya terhubung dengan piston dan dipasangkan dengan rangka kendaraan. Bagian bawahnya, terpasang dengan silinder bagian bawah yang dipasangkan dengan roda.

Fluida kental menyebabkan gaya redaman yang bergantung pada kecepatan relatif dari kedua ujung unit tersebut. Hal ini membantu untuk mengendalikan guncangan pada roda.

Konstruksi shock absorber itu terdiri atas piston, piston rod dan tabung. Piston adalah komponen dalam tabung shock absorber yang bergerak naik turun di saat shock absorber bekerja. Sedangkan tabung adalah tempat dari minyak shock absorber dan sekaligus ruang untuk piston bergerak naik turun. Dan yang terakhir adalah piston rod adalah batang yang menghubungkan piston dengan tabung bagian atas (tabung luar) dari shock absorber. Untuk lebih jelasnya dapat dilihat pada gambar berikut:



Gambar 1. Detail struktur shock absorber

Shock absorber bekerja dalam dua siklus yakni siklus kompresi dan siklus ekstensi.

### 1. Siklus kompresi (penekanan)

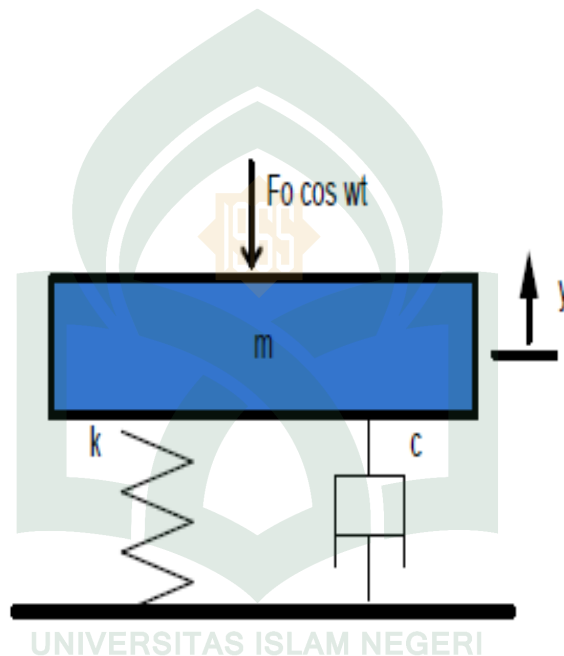
Saat shock absorber ditekan karena gaya osilasi dari pegas suspensi, maka gerakan yang terjadi adalah shock absorber mengalami pemendekan ukuran. Siklus kompresi terjadi ketika piston bergerak ke bawah, menekan fluida hidrolik di dalam ruang bawah piston. Dan minyak shock absorber yang berada dibawah piston akan naik ke ruang atas piston melalui lubang yang ada pada piston. Sementara lubang kecil (orifice) pada piston tertutup karena katup menutup saluran orifice tersebut. Penutupan katup ini disebabkan karena peletakan katup yang berupa membran (plat tipis) dipasangkan dibawah piston, sehingga ketika minyak shock absorber berusaha naik ke atas maka katup membran ini akan terdorong oleh shock absorber dan akibatnya menutup saluran orifice. Jadi

minyak shock absorber akan menuju ke atas melalui lubang yang besar pada piston, sementara minyak tidak bisa keluar melalui saluran oriface pada piston. Pada saat ini shock absorber tidak melakukan peredaman terhadap gaya osilasi dari pegas suspensi, karena minyak dapat naik ke ruang di atas piston dengan sangat mudah.

## **2. Siklus ekstensi (memanjang)**

Pada saat memanjang piston di dalam tabung akan bergerak dari bawah naik ke atas. Gerakan naik piston ini membuat minyak shock absorber yang sudah berada diatas menjadi tertekan. Minyak shock absorber ini akan mencari jalan keluar agar tidak tertekan oleh piston terus. Maka minyak ini akan mendorong katup pada saluran oriface untuk membuka dan minyak akan keluar atau turun ke bawah melalui saluran oriface. Pada saat ini katup pada lubang besar di piston akan tertutup karena letak katup ini yang berada di atas piston. Minyak shock absorber ini akan menekan katup lubang besar, piston ke bawah dan mengakibatkan katup ini tertutup. Tapi letak katup saluran oriface membuka karena letaknya berada di bawah piston, sehingga ketika minyak shock menekan ke bawah katup ini membuka. Pada saat ini minyak shock absorber hanya dapat turun ke bawah melalui saluran orifice yang kecil. Karena salurannya yang kecil, maka minyak shock absorber tidak akan bisa cepat turun ke bawah alias terhambat. Di saat inilah shock absorber melakukan peredaman terhadap gaya osilasi pegas suspensi. Tipikal mobil atau truk ringan akan memiliki lebih banyak perlawanan selama siklus ekstensi daripada siklus kompresi. Semua peredam kejut modern adalah

kecepatan-sensitif – suspensi semakin cepat bergerak, semakin banyak perlawanan yang shock breker sediakan. Hal ini memungkinkan guncangan untuk menyesuaikan diri dengan kondisi jalan dan untuk mengontrol semua gerakan yang tidak diinginkan yang dapat terjadi dalam kendaraan yang bergerak. Secara sederhana shock absorber merupakan pengaplikasian dari gerak osilasi harmonik yang teredam.



Gambar 2. Sistem fisis pada shock absorber

Bila peredaman diperhitungkan, maka gaya peredam juga berlaku pada massa. Bila bergerak dalam fluida benda akan mendapatkan redaman karena kekentalan fluida. Gaya akibat kekentalan ini sebanding dengan kecepatan benda. Konstanta akibat kekentalan (viskositas) adalah  $c$  dengan satuan  $\text{N s/m}$  (SI).

Persamaan osilasi teredam diberikan oleh hukum gerak kedua,  $F = ma$ , dengan  $F$  merupakan jumlah dari gaya pemulih  $-ky$  dan gaya redaman  $-c \frac{dy}{dt}$  dalam hal ini  $c$  adalah konstanta positif. Diperoleh bahwa

$$\sum F = ma$$

Karena  $F$  merupakan jumlah dari gaya pemulih dan gaya redaman, sedangkan  $a$  merupakan percepatan dalam artian bentuk kestabilan pada bentuk orde dua pada gaya redaman sehingga diperoleh

$$-ky - c \frac{dy}{dt} = m \frac{d^2 y}{dt^2}$$

Kedua ruas dijumlahkan  $-ky - c \frac{dy}{dt}$  sehingga bentuk aljabar diperoleh

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + c \frac{dy}{dt} + ky = 0$$

dalam osilasi teredam sebenarnya masih terdapat gaya lain yang bekerja berupa gaya paksaan. Dalam hal ini, dimisalkan gaya paksaan yang diberikan terhadap sistem yang telah disebutkan adalah  $F_0 \cos \omega t$ . Di sini  $F_0$  adalah harga dari gaya eksternal dan  $\omega$  adalah frekuensi sudutnya. Untuk jelasnya, dapat kita bayangkan bahwa gaya eksternal tersebut diberikan langsung pada massa yang digantungkan pada pegas. Maka kita peroleh persamaan:

$$\sum F = ma$$

$$-ky - c \frac{dy}{dt} + F_0 \cos \omega t = m \frac{d^2 y}{dt^2}$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + c \frac{dy}{dt} + ky = F_0 \cos \omega t \quad (13)$$

Keterangan :

$F$	= Gaya
$c$	= Konstanta akibat kekentalan (viskositas)
$F_0$	= Besar dari gaya eksternal
$\omega$	= Frekuensi sudut
$m$	= Massa
$a$	= Percepatan
$\frac{dy}{dt}$	= Perubahan Gaya Redaman
$k$	= Konstanta Pegas

## H. Integrasi Ilmu Agama

Al-Quran merupakan kitab suci yang banyak menyimpan rahasia-rahasia baik dalam dunia nyata maupun ghaib, baik kehidupan masa sekarang ataupun masa yang akan datang, dan kini mulai banyak dikaji oleh para ilmuwan. Karena tanpa disadari bahwa Al-Quran sebenarnya menjadi acuan dalam berbagai hal bukan hanya sekedar sebagai pelengkap.

Sesungguhnya Allah Swt. menunjukkan tanda-tanda kekuasaan-Nya kepada hamba-Nya melalui dua jalur, yaitu jalur formal yang berupa ayat-ayat *qauliyah* dan jalur non formal yang berupa ayat-ayat *kauniyah*. Ayat-ayat *qauliyah* merupakan suatu kalam Allah Swt yang diturunkan secara formal kepada Nabi Muhammad Saw. Sedangkan ayat-ayat *kauniyah* merupakan suatu

fenomena alam dimana fenomena alam yang terjadi merupakan ciptaan Allah Swt sekaligus sebagai tanda kebesaran-Nya di bumi ini, sehingga merupakan jalur non formal dan manusia sendirilah yang nantinya mengeksplorasinya. Dimana upaya tersebut dikenal sebagai sains, dan aplikasinya disebut teknologi. Jika berbicara tentang sains, maka tidak lepas dari matematika. Jauh sebelumnya, umat Islam telah menyadari bahwa Al-Qur'an terdapat banyak penjelasan akan ilmu matematika.<sup>31</sup>

Allah Swt. berfirman dalam surah Q.S Al-Maidah 5/65-66 :

يَا أَيُّهَا النَّبِيُّ حَرِّضِ الْمُؤْمِنِينَ عَلَى الْقِتَالِ ۚ إِنْ يَكُنْ مِنْكُمْ عِشْرُونَ صَابِرُونَ يَغْلِبُوا  
مِائَتِينَ ۚ وَإِنْ يَكُنْ مِنْكُمْ مِائَةٌ يَغْلِبُوا أَلْفًا مِنَ الَّذِينَ كَفَرُوا بِأَنَّهُمْ قَوْمٌ لَا  
يَفْقَهُونَ ۚ أَلَمْ تَرَ أَنَّ اللَّهَ عَزَّ وَجَلَّ عَنْكُمْ وَعَلَّمَ أَنَّ فِيكُمْ ضَعْفًا ۚ فَإِنْ يَكُنْ مِنْكُمْ  
مِائَةٌ صَابِرَةٌ يَغْلِبُوا مِائَتِينَ ۚ وَإِنْ يَكُنْ مِنْكُمْ أَلْفٌ يَغْلِبُوا أَلْفِينَ بِإِذْنِ اللَّهِ ۚ وَاللَّهُ مَعَ  
الصَّابِرِينَ ۚ

Terjemahnya :

“Hai Nabi, kobarkanlah semangat para mukmin untuk berperang. Jika ada dua puluh orang yang sabar diantaramu, niscaya mereka akan dapat mengalahkan dua ratus orang musuh. Dan jika ada seratus orang yang sabar diantaramu, niscaya mereka akan dapat mengalahkan seribu dari pada orang kafir, disebabkan orang-orang kafir itu kaum yang tidak mengerti. Sekarang Allah Telah meringankan kepadamu dan Dia telah mengetahui bahwa padamu ada kelemahan. Maka jika ada diantaramu seratus orang yang sabar, niscaya mereka

<sup>31</sup> Drs. Abdul Rahman, M.Pd dan Nursalam, M.Si. 2007. *Persamaan Diferensial Biasa Teori dan Aplikasi*. Makassar : Tim Penulis, hal.1



akan dapat mengalahkan dua ratus orang kafir; dan jika diantaramu ada seribu orang (yang sabar), niscaya mereka akan dapat mengalahkan dua ribu orang, dengan seizin Allah. dan Allah beserta orang-orang yang sabar.” (Q.S. Al-Maidah: 5)<sup>32</sup>

Pada ayat 65 disebutkan bahwa 20 orang mukmin yang sabar akan mengalahkan 200 orang kafir, dan 100 orang mukmin yang sabar akan mengalahkan 1000 orang kafir. Sedangkan pada ayat 66 disebutkan bahwa, karena adanya kelemahan, 100 orang mukmin yang sabar akan mengalahkan 200 orang kafir, dan 1000 orang mukmin yang sabar akan mengalahkan 2000 orang kafir. Meskipun ayat tersebut berbicara dalam konteks perjuangan antara orang-orang beriman dengan orang-orang kafir, akan tetapi pada sisi yang lain penyebutan angka-angka pada kedua ayat tersebut, terdapat pula konsep matematika.

Matematika merupakan salah satu ilmu yang banyak manfaatnya dalam kehidupan sehari-hari dan memiliki peranan penting untuk ilmu pengetahuan lain seperti fisika, biologi, kimia dan ilmu-ilmu lainnya. Sehingga matematika banyak digunakan untuk memecahkan masalah-masalah yang dihadapi dalam bidang sains dan teknologi dimana sering ditemukan masalah-masalah yang penyelesaiannya tidak dapat dicari dengan hanya menggunakan rumus atau konsep yang sudah ada. Karena adanya permasalahan mengenai kuantitas bahwa perubahan terus menerus yang berkaitan dengan waktu dapat digambarkan dengan suatu persamaan diferensial.

Jika berbicara tentang ilmu jauh sebelumnya umat Islam telah menyadari bahwa Al-Qur'an terdapat banyak penjelasan akan ilmu matematika.

---

<sup>32</sup> Departemen Agama RI, *Alqur'an dan Terjemahannya*, (Jakarta: Lembaga Percetakan Al-Qur'an Raja Fahd dan Kementrian Agama RI), h.165.

Allah SWT. berfirman dalam (Q.S Az – zumar 39/9) berbunyi :

أَمَّنْ هُوَ قَنِتٌ ءَانَاءَ اللَّيْلِ سَاجِدًا وَقَائِمًا يَحْذَرُ الْآخِرَةَ وَيَرْجُوا رَحْمَةَ رَبِّهِ ۚ قُلْ هَلْ يَسْتَوِي الَّذِينَ يَعْلَمُونَ وَالَّذِينَ لَا يَعْلَمُونَ ۚ إِنَّمَا يَتَذَكَّرُ أُولُوا الْأَلْبَابِ ﴿٩﴾

Terjemahnya:

“Apakah kamu hai orang musyrik yang lebih beruntung, ataukah orang yang beribadah di waktu-waktu malam dengan sujud dan berdiri, sedang ia takut kepada (azab) akhirat dan mengharapkan rahmat Tuhannya? Katakanlah: "Adakah sama orang-orang yang mengetahui dengan orang-orang yang tidak mengetahui?" Sesungguhnya orang yang berakallah yang dapat menerima pelajaran”.<sup>33</sup>

Ayat di atas menggambarkan sikap lahir dan batin siapa yang tekun itu. Sikap lahirnya di gambarkan oleh kata-kata *sajidan* / sujud dan *qa'iman*/ berdiri sedangkan sikap batinnya di lukiskan oleh kalimat ( *يَحْذَرُ الْآخِرَةَ وَيَرْجُوا رَحْمَةَ رَبِّهِ* ) *yahdzarul-akhirata wa yarju ar-rahman* / takut kepada akhirat dan mengharapkan rahmat Tuhannya.” Ayat diatas menggaris bawahi rasa takut hanya pada akhirat, sedang rahmat tidak di batasi dengan akhirat, sehingga dapat mencakup rahmat duniawi dan ukhrawi. Memang seorang mukmin hendaknya tidak merasa takut menghadapi kehidupan duniawi, karena apapun yang terjadi selama ia bertakwa maka itu tidak masalah, bahkan dapat merupakan sebab keninggian derajatnya di akhirat. Adapun rahmat, maka tentu saja yang di harapkan adalah rahmat menyeluruh, dunia dan akhirat. Takut dan mengharapkan menjadikan seseorang selalu waspada, tetapi tidak berputus asa dan dalam saat yang sama tidak yakin. Keputusan mengundang

<sup>33</sup> Depertemen Agama RI. Al-Jumanatul’ Ali Al-Quran dan terjemahan(Bandung:Penerbit J-ART.2005).

apatisme, sedang keyakinan penuh dapat mengundang pengabaian persiapan. Seseorang hendaknya selalu waspada, sehingga akan selalu meningkatkan ketakwaan, namun tidak pernah kehilangan optimism dan sangka baik kepada Allah swt.

Kata (يَعْلَمُونَ) *ya'lamun* pada ayat di atas, ada juga ulama yang memahaminya sebagai kata yang tidak memerlukan objek. Maksudnya siapa yang memiliki pengetahuan apa pun pengetahuan itu pasti tidak sama dengan yang tidak memilikinya. Hanya saja jika makna ini yang di pilih maka harus di garis bawahi bahwa ilmu pengetahuan yang di maksud adalah pengetahuan yang bermanfaat, yang menjadikan seseorang mengetahui hakikat sesuatu lalu menyesuaikan diri dan amalnya dengan pengetahuannya itu.<sup>34</sup>




---

<sup>34</sup> M. Quraish Shihab. Tafsir Al – Mishbah. Vol 24

### **BAB III**

## **METODOLOGI PENELITIAN**

### **A. Jenis Penelitian**

Jenis penelitian yang digunakan yang digunakan penulis adalah studi pustaka yaitu penelitian yang bertujuan untuk mengumpulkan data dan informasi mengenai masalah yang akan diteliti dengan cara mengumpulkan beberapa materi-materi yang terdapat di ruang perpustakaan, seperti buku-buku tentang persamaan diferensial, buku-buku tentang kalkulus, jurnal-jurnal dari internet, dan lain-lain.

### **B. Sumber Data**

Sumber data dalam penelitian ini adalah buku-buku persamaan diferensial, buku-buku kalkulus, dan buku-buku matematika lainnya yang dapat mendukung proses penelitian seperti Buku Transformasi Laplace dan beberapa jurnal yang mendukung terhadap penelitian.

### **C. Waktu dan Lokasi Penelitian**

Waktu yang digunakan dalam pelaksanaan penelitian ini adalah, sekitar delapan bulan terhitung dari Desember 2015 sampai dengan September 2016 dan lokasi penelitian yaitu pada perpustakaan UIN alauddin Makassar.

#### D. Prosedur Penelitian

Langkah-langkah untuk menyelesaikan pada Dinamika Sistem Fisis-Massa Pegas Dengan *Shock Absorber* menggunakan metode Transformasi Laplace adalah sebagai berikut:

1. Menentukan model atau persamaan yang telah didapatkan dari persamaan diferensial tak linear tak homogen pada sistem fisis-massa pegas *shock absorber*, maka diperoleh model yaitu

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + c \frac{dy}{dt} + ky = F_0 \cos \omega t$$

2. Menentukan solusi homogen  $y_h$  persamaan diferensial tak linear tak homogen dari model sistem fisis-massa pegas *shock absorber*, dengan syarat sebagai berikut

- a. Jika akar  $r_l$  adalah real. Dalam kasus ini terdapat  $k$  penyelesaian bebas linier. Maka solusi umumnya adalah

$$y_h = e^{rx}, xe^{rx}, \dots, x^{k-1} e^{rx}$$

untuk  $k \geq 1$ .

- b. Jika akar  $r_l$  adalah kompleks. Maka solusi umumnya adalah

$$y_h = e^{ax} \cos(\beta x), xe^{ax} \cos(\beta x), \dots, x^{k-1} e^{ax} \cos(\beta x),$$

$$e^{ax} \sin(\beta x), xe^{ax} \sin(\beta x), \dots, x^{k-1} e^{ax} \sin(\beta x), x^{k-1} e^{ax} \sin(\beta x).$$

3. Dalam memperoleh solusi partikular  $y_p$  atau solusi khusus dari model sistem fisis-massa pegas *shock absorber* terlebih dahulu mengkonstruksinya ke bentuk transformasi laplace kemudian menggunakan metode transformasi laplace dengan bentuk yaitu

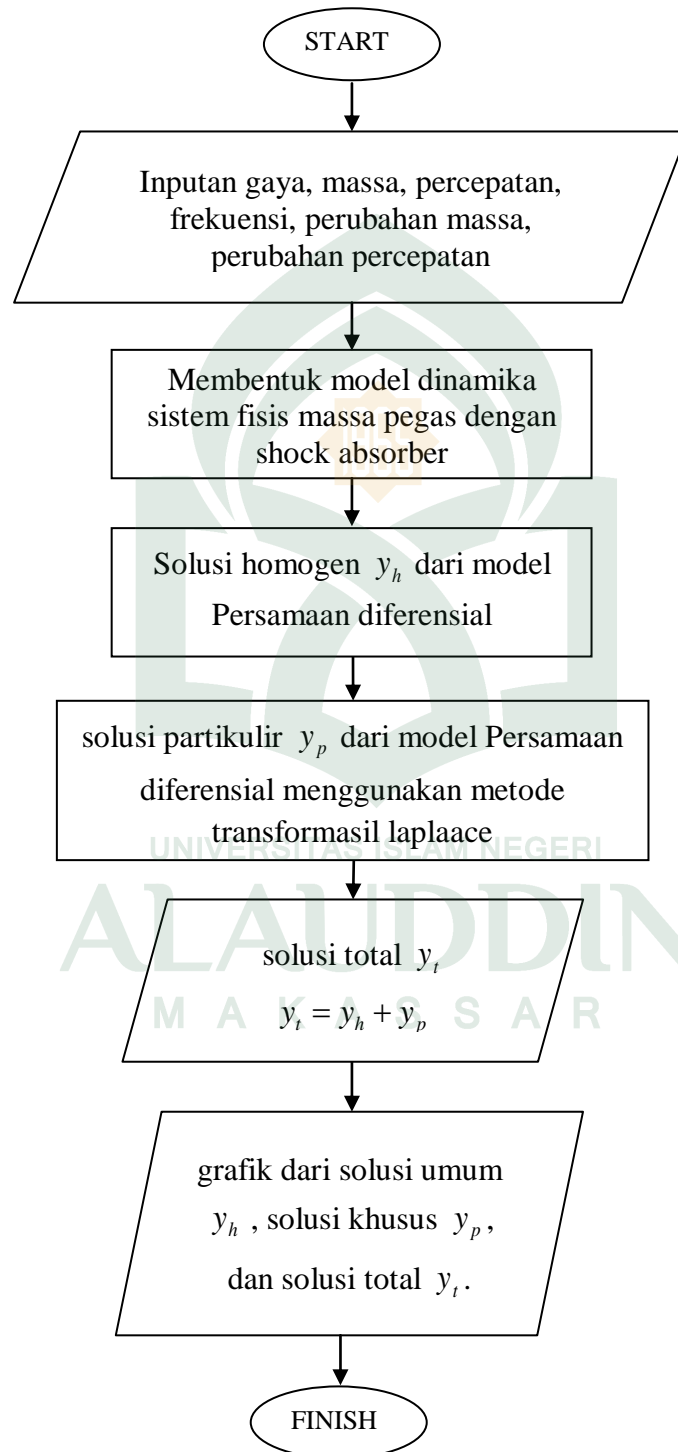
$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

4. Menentukan solusi total  $y_t$  dari penggabungan solusi umum (solusi homogen)  $y_h$  ( homogen ) dengan solusi khusus  $y_p$  ( partikular ).

$$y_t = y_h + y_p$$

5. Membuat grafik dari solusi total  $y_t$  , solusi umum (solusi homogen)  $y_h$  , dan solusi khusus  $y_p$

**E. Flow chart dinamika sistem fisis-massa pegas dengan *shock absorber* menggunakan metode transformasi laplace.**



## BAB IV

### HASIL DAN PEMBAHASAN

#### A. HASIL PENELITIAN

Model atau persamaan yang telah didapatkan dari persamaan diferensial tak linear tak homogen pada sistem fisis-massa pegas *shock absorber*, berdasarkan model pada persamaan (13) yaitu

$$\begin{aligned}\sum F &= ma \\ -ky - c \frac{dy}{dt} + F_0 \cos \omega t &= m \frac{d^2 y}{dt^2} \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} + c \frac{dy}{dt} + ky &= F_0 \cos \omega t\end{aligned}$$

Atau dapat dimodelkan ke bentuk lain

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{c}{m} \frac{dy}{dt} + \frac{k}{m} y = \frac{F_0 \cos \omega t}{m} \quad (14)$$

Untuk memperoleh solusi homogen ( $y_h$ ) dengan mencari karakteristik dari persamaan (14),

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{c}{m} \frac{dy}{dt} + \frac{k}{m} y = \frac{F_0 \cos \omega t}{m} \quad (14)$$

Misalkan

$$y = e^{rt} \quad (15)$$



$$\frac{dy}{dt} = re^{rt} \quad (16)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = r^2 e^{rt} \quad (17)$$

Maka persamaan (15), (16), dan (17) Substitusi ke persamaan (14)

$$\begin{aligned} r^2 e^{rt} + \frac{c}{m} r e^{rt} + \frac{k}{m} e^{rt} &= 0 \\ \left( r^2 + \frac{c}{m} r + \frac{k}{m} \right) e^{rt} &= 0 \\ \left( r^2 + \frac{c}{m} r + \frac{k}{m} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

akar-akar karakteristik dari persamaan (18), dengan menggunakan rumus ABC,

maka koefisien dari persamaan (18) diperoleh  $a=1$ ,  $b=\frac{c}{m}$ ,  $c=\frac{k}{m}$

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$r_{1,2} = \frac{-\left(\frac{c}{m}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{c}{m}\right)^2 - 4(1)\left(\frac{k}{m}\right)}}{2(1)}$$

$$r_{1,2} = \frac{-\left(\frac{c}{m}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{c^2}{m^2}\right) - \left(\frac{4k}{m}\right)}}{2}$$

$$r_{1,2} = \frac{-c}{2m} \pm \frac{\sqrt{\left(\frac{c^2}{m^2}\right) - \left(\frac{4k}{m}\right)}}{2}$$

karena terjadi gerak teredam kritis pada *shock absorber* ( Bila peredaman diperhitungkan, maka gaya peredam juga berlaku pada massa. Bila bergerak dalam fluida benda akan mendapatkan redaman karena kekentalan fluida. Gaya

akibat kekentalan ini sama dengan kecepatan benda  $\left(\frac{c^2}{m^2} = \frac{4k}{m}\right)$ , maka akar-akar

karateristiknya

$$r_{1,2} = \frac{-c}{2m} \quad (19)$$

dengan mensubstitusikan persamaan (19) ke persamaan (15) maka solusi homogenya yaitu

$$y_h = \left( c_1 e^{\frac{-c}{2m}t} + c_2 x e^{\frac{-c}{2m}t} \right) \quad (20)$$

Dimana,  $C_1 C_2$  adalah Konstanta Integrasi

Untuk memperoleh solusi khususnya  $y_p$  maka dilakukan transformasi

Laplace terhadap persamaan diferensial, maka harus diingat terlebih dahulu

$$\frac{d}{dt} u.v = u \frac{dv}{dt} + \frac{du}{dt} v$$

$$\int u \frac{dv}{dt} dt = u.v - \int \frac{du}{dt} v . dt \quad (21)$$

bila transformasi laplace adalah  $Y(s) = L y(t) = \int_0^{\infty} e^{-st} y(t) dt$ , maka transformasi

laplace dari turunan pertama adalah  $\mathcal{L} \left( \frac{dy}{dt} \right) = \int_0^{\infty} e^{-st} \left( \frac{dy}{dt} \right) dt$  . Pada persamaan (21)

dmisalkan  $u$  adalah  $e^{-st}$  dan  $v$  adalah  $y$ , maka

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(\frac{dy}{dt}\right) &= \int_0^{\infty} e^{-st} \left(\frac{dy}{dt}\right) dt \\ \mathcal{L}\left(\frac{dy}{dt}\right) &= \left[(e^{-st} y)\right]_0^{\infty} - \left(\int_0^{\infty} -se^{-st} y dt\right) \\ \mathcal{L}\left(\frac{dy}{dt}\right) &= \left[(e^{-st} y)\right]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} y dt\end{aligned}\quad (22)$$

Jika diasumsikan bahwa pada saat  $t \rightarrow \infty$  grafik  $y(t)$  mengalami kenaikan cukup lambat dibanding dengan grafik  $e^{-st}$  maka  $e^{-st} y(t) \rightarrow 0$  untuk  $t \rightarrow \infty$  sehingga

$$\left[(e^{-st} y)\right]_0^{\infty} = 0 - e^0 y(0) = -y(0)$$

Bentuk persamaan (22) dapat disederhanakan menjadi

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(\frac{dy}{dt}\right) &= \left[(e^{-st} y)\right]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} y dt \\ \mathcal{L}\left(\frac{dy}{dt}\right) &= -y(0) + sY(s)\end{aligned}\quad (23)$$

Dari persamaan (23) , maka Transformasi Laplace dari turunan pertama sebuah fungsi adalah

$$\mathcal{L}\left(\frac{dy}{dt}\right) = sY(s) - y(0)$$

atau

$$\mathcal{L}\left(\frac{dy}{dt}\right) = sY(s) - y(0)$$

Transformasi Laplace dari turunan kedua sebuah fungsi dapat dicari dengan cara yang sama.

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right) = s^2 Y(s) - \frac{dy}{dt}(0) - sy(0) \quad (24)$$

Sedangkan Transformasi Laplace dari turunan ke -n suatu fungsi adalah

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^n y}{dt^n}\right) = s^n Y(s) - \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}(0) - \dots - s^{n-2} \frac{dy}{dt}(0) - s^{n-1} y(0) \quad (25)$$

Atau

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^n y}{dt^n}\right) = s^n Y(s) - s^{n-1} y(0) - \dots - s^{n-2} \frac{dy}{dt}(0) - s^{n-1} y(0) \quad (26)$$

Maka solusi partikularnya,

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{c}{m} \frac{dy}{dt} + \frac{k}{m} y = \frac{F_0}{m} (\cos \omega t)$$

Mengubah kebentuk laplace ( $\mathcal{L}$ )

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right) + \mathcal{L}\left(\frac{c}{m} \frac{dy}{dt}\right) + \mathcal{L}\left(\frac{k}{m} y\right) = \mathcal{L}\left(\frac{F_0}{m} (\cos \omega t)\right) \quad (27)$$

Selanjutnya pada persamaan (27) di ubah ke bentuk  $s$  menggunakan transformasi laplace pada bentuk turunan (26) dengan syarat  $y(0) = 0, y'(0) = 1$

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right) + \mathcal{L}\left(\frac{c}{m} \frac{dy}{dt}\right) + \mathcal{L}\left(\frac{k}{m} y\right) = \mathcal{L}\left(\frac{F_0}{m} (\cos \omega t)\right)$$

Mencari bentuk laplace dari fungsi  $\cos \omega t$  berdasarkan definisi Laplace persamaan (27) pada , maka

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} \{F(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} \cos \omega t \, dt \\
 &= \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^p e^{-st} \frac{1}{\omega} d(\sin \omega t) \\
 &= \lim_{p \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\omega} \sin \omega t \cdot e^{-st} - \int_0^{\infty} \frac{1}{\omega} \sin \omega t \, d(e^{-st}) \right)_0^p \\
 &= \lim_{p \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\omega} \sin \omega t \cdot e^{-st} + \int_p^{\infty} \frac{s}{\omega} \sin \omega t \cdot e^{-st} \, dt \right)_0^p \\
 &= \lim_{p \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\omega} \sin \omega t \cdot e^{-st} + \frac{s}{\omega} \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot \frac{1}{\omega} d(-\cos \omega t) \right)_0^p \\
 &= \lim_{p \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\omega} \sin \omega t \cdot e^{-st} + \frac{s}{\omega^2} (e^{-st} (-\cos \omega t)) - \int_0^p -\cos \omega t \cdot d(e^{-st}) \right)_0^p \\
 &= \lim_{p \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\omega} \sin \omega t \cdot e^{-st} - \frac{s}{\omega^2} (e^{-st} \cos \omega t) + \int_0^p \cos \omega t \cdot -s e^{-st} \, dt \right)_0^p \\
 &= \lim_{p \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\omega} \sin \omega t \cdot e^{-st} - \frac{s}{\omega^2} (e^{-st} \cos \omega t) - \frac{s^2}{\omega^2} \int_0^p \cos \omega t \cdot e^{-st} \, dt \right)_0^p \\
 &= \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\omega^2}{s^2 + \omega^2} \left( \frac{1}{\omega} \sin \omega t \cdot e^{-st} - \frac{s}{\omega^2} \cos \omega t \cdot e^{-st} \right)_0^p \\
 &= \frac{\omega^2}{s^2 + \omega^2} \left( \frac{\sin \omega t}{\omega \cdot e^{st}} - \frac{s \cdot \cos \omega t}{\omega^2 \cdot e^{st}} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\omega^2}{s^2 + \omega^2} \left( (0-0) - \left( 0 - \frac{s}{\omega^2} \right) \right) \\
&= \frac{\omega^2}{s^2 + \omega^2} \left( \frac{s}{\omega^2} \right) \\
&= \frac{s}{s^2 + \omega^2}
\end{aligned}$$

Setelah diperoleh bentuk laplace dari fungsi  $\cos \omega t$  , persamaan (27) diubah kebentuk laplace sehingga,

$$\begin{aligned}
\{s^2 Y(s) - y'(0) - sy(0)\} + \left\{ \left( \frac{c}{m} \right) s Y(s) + \frac{c}{m} y(0) \right\} + \left\{ \frac{k}{m} Y(s) \right\} &= \frac{F_0}{m} \left( \frac{s}{s^2 + \omega^2} \right) \\
\{s^2 Y(s) - y'(0) - sy(0)\} + \left\{ \left( \frac{c}{m} \right) s Y(s) + \frac{c}{m} y(0) \right\} + \left\{ \frac{k}{m} Y(s) \right\} &= \frac{F_0}{m} \left( \frac{s}{s^2 + \omega^2} \right) \\
\{s^2 Y(s) - y'(0) - sy(0)\} + \left\{ \left( \frac{c}{m} \right) s Y(s) + \frac{c}{m} y(0) \right\} + \left\{ \frac{k}{m} Y(s) \right\} &= \frac{F_0}{m} \left( \frac{s}{s^2 + \omega^2} \right) \quad (28)
\end{aligned}$$

Diketahui  $y(0) = 0, y'(0) = 1$  kemudian substitusi ke persamaan (28),

$$\{s^2 Y(s) - (1) - s(0)\} + \left\{ \left( \frac{c}{m} \right) s Y(s) + \frac{c}{m} (0) \right\} + \left\{ \frac{k}{m} Y(s) \right\} = \frac{F_0}{m} \left( \frac{s}{s^2 + \omega^2} \right) \quad (29)$$

Persamaan (29) diubah kebentuk sederhana, sehingga

$$s^2 Y(s) + \frac{c}{m} s Y(s) + \frac{k}{m} Y(s) - 1 = \frac{F_0}{m} \left( \frac{s}{s^2 + \omega^2} \right)$$

$$s^2 Y(s) + \frac{c}{m} s Y(s) + \frac{k}{m} Y(s) - 1 = \frac{F_0}{m} \left( \frac{s}{s^2 + \omega^2} \right)$$

$$s^2 Y(s) + \frac{c}{m} s Y(s) + \frac{k}{m} Y(s) = \frac{F_0}{m} \left( \frac{s}{s^2 + \omega^2} \right) + 1$$

$$(ms^2 + cs + k)Y(s) = F_0\left(\frac{s}{s^2 + \omega^2}\right) + m \quad (30)$$

Untuk mempermudah bentuk laplace yang diinginkan, pada persamaan (30) diubah menjadi

$$Y(s) = \frac{F_0\left(\frac{s}{s^2 + \omega^2}\right) + m}{(ms^2 + cs + k)} \quad (31)$$

Dengan proses aljabar pada persamaan (31), sehingga

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{(ms^2 + cs + k)} \left\{ \left( \frac{F_0 s}{s^2 + \omega^2} \right) + m \right\} \\ Y(s) &= \frac{1}{(ms^2 + cs + k)} \left\{ \frac{F_0 s}{s^2 + \omega^2} + m \right\} \\ Y(s) &= \frac{F_0 s}{(ms^2 + cs + k)(s^2 + \omega^2)} + \frac{m}{(ms^2 + cs + k)} \\ Y(s) &= \left\{ \frac{F_0}{(ms^2 + cs + k)} \right\} \left\{ \frac{s}{(s^2 + \omega^2)} \right\} + \left\{ \frac{m}{(ms^2 + cs + k)} \right\} \\ Y(s) &= \left\{ \frac{F_0}{\left( \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4km}}{2m} \right)} \right\} \left\{ \frac{s}{(s^2 + \omega^2)} \right\} + \left\{ \frac{m}{\left( \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4km}}{2m} \right)} \right\} \\ Y(s) &= \left\{ \frac{2m}{F_0(-c \pm \sqrt{c^2 - 4km})} \right\} \left\{ \frac{s}{(s^2 + \omega^2)} \right\} + \left\{ \frac{2m}{m(-c \pm \sqrt{c^2 - 4km})} \right\} \end{aligned} \quad (32)$$

Menginvers persamaan (32) ke bentuk  $f(x) = y$

$$Y(s) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \left\{ \frac{2m}{F_0(-c \pm \sqrt{c^2 - 4km})} \right\} \left\{ \frac{s}{(s^2 + \omega^2)} \right\} + \left\{ \frac{2m}{m(-c \pm \sqrt{c^2 - 4km})} \right\} \right] \quad (33)$$

Substitusi bentuk invers ke persamaan (33), maka

$$Y(s) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2m}{F_0(-c \pm \sqrt{c^2 - 4km})} \right\} * \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{(s^2 + \omega^2)} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2m}{m(-c \pm \sqrt{c^2 - 4km})} \right\}$$

$$Y(s) = \int_0^t \left\{ \frac{2m}{F_0(-c \pm \sqrt{c^2 - 4km})} \right\} dt * \int_0^t \left\{ \frac{s}{(s^2 + \omega^2)} \right\} dt + \int_0^t \left\{ \frac{2m}{m(-c \pm \sqrt{c^2 - 4km})} \right\} dt \quad (34)$$

Bentuk pengintegralan tentu dengan interval 0 sampai t terhadap t pada persamaan (34), maka

$$y = \left\{ \frac{2m}{F_0(-c \pm \sqrt{c^2 - 4km})} (t) \right\} \left\{ \cos(\omega t) \right\} + \left\{ \frac{2m}{m(-c \pm \sqrt{c^2 - 4km})} (t) \right\} \quad (35)$$

$$y = \left\{ \frac{2m}{F_0(-c \pm \sqrt{c^2 - 4km})} (t) - \frac{2m}{F_0(-c \pm \sqrt{c^2 - 4km})} (0) \right\} \left\{ \cos(\omega t) \right\} +$$

$$\left\{ \frac{2m}{m(-c \pm \sqrt{c^2 - 4km})} (t) - \frac{2m}{m(-c \pm \sqrt{c^2 - 4km})} (0) \right\}$$

$$y = \left\{ \frac{2mt}{F_0(-c \pm \sqrt{c^2 - 4km})} - (0) \right\} \left\{ \cos(\omega t) \right\} + \left\{ \frac{2m}{m(-c \pm \sqrt{c^2 - 4km})} (t) - (0) \right\}$$

$$y = \left\{ \frac{2mt}{F_0(-c \pm \sqrt{c^2 - 4km})} \right\} \left\{ \cos(\omega t) \right\} + \left\{ \frac{2mt}{m(-c \pm \sqrt{c^2 - 4km})} \right\} \quad (36)$$

Penyederhanaan pada persamaan (36), sehingga



$$y = \frac{4mt \cos(\omega t)}{(-c \pm \sqrt{c^2 - 4km})(F_0 + m)} \quad (37)$$

maka diperoleh solusi partikular pada persamaan (37).

Untuk memperoleh solusi total  $y_t$  maka digabung solusi umum (solusi homogen)  $y_h$  dengan solusi partikular  $y_p$ , persamaan (20) dan (37)

$$y_t = y_h + y_p$$

$$y_t = \left( c_1 e^{\frac{-c}{2m}t} + c_2 x e^{\frac{-c}{2m}t} \right) + \frac{4mt \cos(\omega t)}{(-c \pm \sqrt{c^2 - 4km})(F_0 + m)} \quad (38)$$

#### Contoh 16 Kasus :

Untuk menggambarkan ketergantungan gerakan (respon) pada koefisien peredam, gambarlah grafik tiga solusi dari empat persamaan diferensial

$$y'' + cy' + 900y = 0$$

yang memenuhi kondisi awal  $y(0) = 1, y'(0) = 0$  dengan  $c = 2, 10, 30, k = 900, m = 1$

Penyelesaian :

Dengan mensubstitusikan masing-masing nilai  $c$ , kemudian diselesaikan masalah nilai awal tersebut. Persamaan pertama dengan  $c = 2$

$$y'' + 2y' + 900y = 0$$

Sehingga persamaan diferensial homogenya :

$$y'' + 2y' + 900y = 0$$

Misalkan  $y' = \lambda$  maka disubstitusikan ke persamaan diferensial homogen sehingga:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 900 = 0$$

diketahui  $m=1, c=2$  dan  $k=900$  dengan menggunakan rumus  $abc$ , dimisalkan

$$a=1, b=2 \text{ dan } c=900$$

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(1)(900)}}{2(1)} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 3600}}{2} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{-3596}}{2} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{-1} 2\sqrt{899}}{2} \\ &= \frac{-2 \pm 2i\sqrt{899}}{2} \\ &= -1 \pm i\sqrt{899}\end{aligned}$$

Karena akar-akarnya merupakan imajiner maka solusi umum (solusi homogen) persamaan diferensial homogennya :

$$y_h = c_1 e^{-t} \cos(\sqrt{899}t) + c_2 e^{-t} \sin(\sqrt{899}t)$$

Untuk mencari nilai  $c_1$  dan  $c_2$ , maka digunakan nilai awal  $y(0)=1$  dan  $y'(0)=0$

yaitu :

$$\text{Syarat awal } y(0)=1$$

$$y(0) = c_1 e^{-0} \cos(\sqrt{899}(0)) + c_2 e^{-0} \sin(\sqrt{899}(0))$$

$$y(0) = c_1 + c_2(0)$$

$$c_1 = 1$$

$$\text{Syarat awal } y'(0) = 0$$

$$y'(0) = -c_1 e^{-t} \sin(\sqrt{899}t) + c_2 e^{-t} \cos(\sqrt{899}t)$$

$$y'(0) = -c_1 e^{-0} \sin(\sqrt{899}(0)) + c_2 e^{-0} \cos(\sqrt{899}(0))$$

$$y'(0) = -c_1(0) + c_2(1)$$

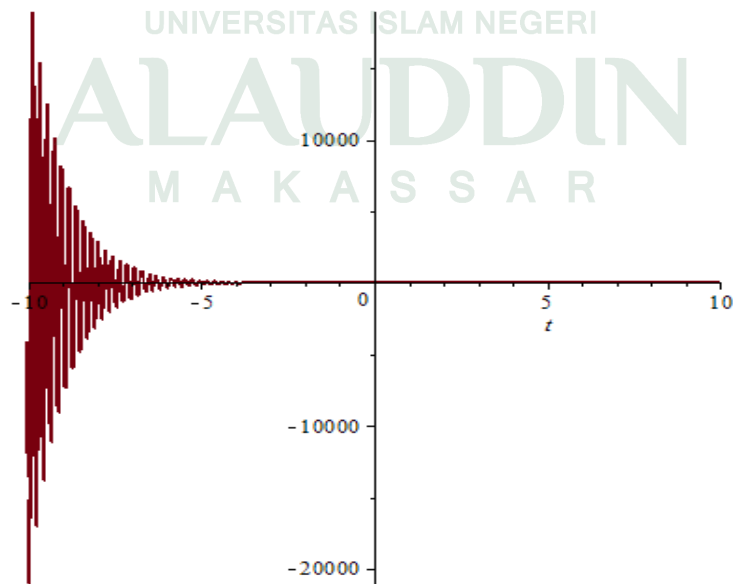
$$c_2 = 0$$

$$\text{Diperoleh } c_1 = 1 \text{ dan } c_2 = 0$$

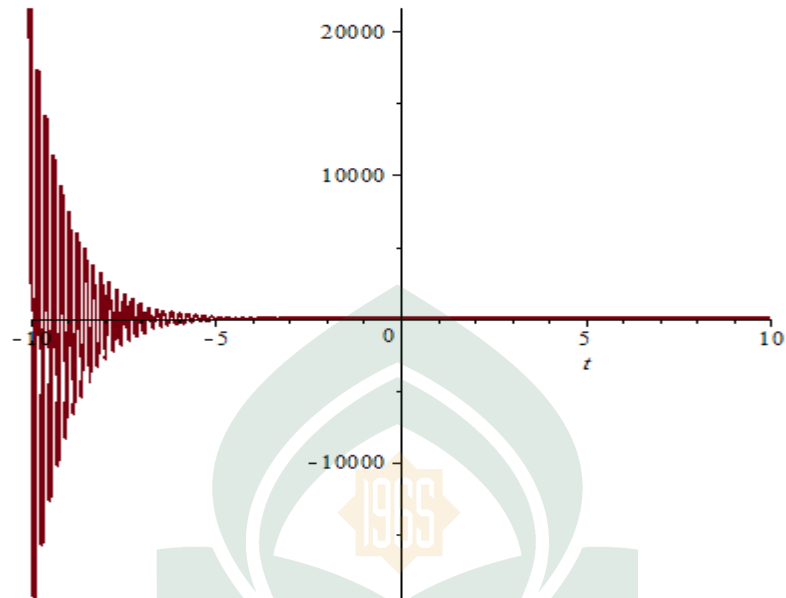
Untuk solusi total, maka

$$y_t = (1)e^{-t} \cos(\sqrt{899}t) + (0)e^{-t} \sin(\sqrt{899}t) + \frac{4mt \cos(\omega t)}{(-c \pm \sqrt{c^2 - 4km})(F_0 + m)}$$

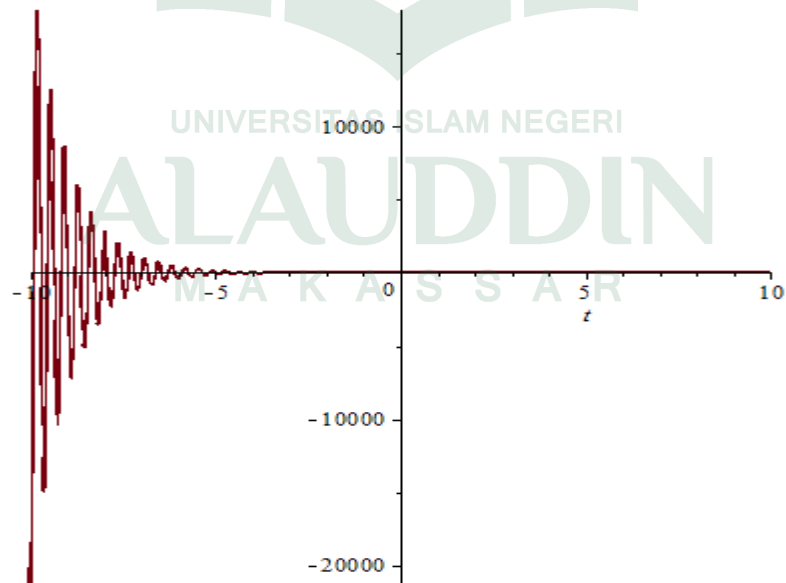
$$y_t = e^{-t} \cos(\sqrt{899}t) + \frac{4mt \cos(\omega t)}{(-c \pm \sqrt{c^2 - 4km})(F_0 + m)}$$



Gambar 3. *Shock Absorber* untuk gerak teredam kritis pada saat  $c = 2, -10 < t < 10$



Gambar 4. *Shock Absorber* untuk gerak teredam kritis pada saat  $c = 10, -10 < t < 10$



Gambar 5. *Shock Absorber* untuk gerak teredam kritis pada saat  $c = 30, -10 < t < 10$

## B. PEMBAHASAN

Persamaan osilasi teredam diberikan oleh hukum gerak kedua,  $\sum F = ma$

dengan  $F$  merupakan jumlah dari gaya pemulih  $-ky$  dan gaya redaman  $-c \frac{dy}{dt}$

dalam hal ini  $c$  adalah konstanta positif. Diperoleh bahwa

$$\sum F = ma$$

Atau

$$-ky - c \frac{dy}{dt} = m \frac{d^2 y}{dt^2}$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + c \frac{dy}{dt} + ky = 0$$

dalam osilasi teredam sebenarnya masih terdapat gaya lain yang bekerja berupa gaya paksaan. Dalam hal ini, dimisalkan gaya paksaan yang diberikan terhadap sistem yang telah disebutkan adalah  $F_0 \cos \omega t$ . Di sini  $F_0$  adalah harga dari gaya eksternal dan  $\omega$  adalah frekuensi sudutnya. Untuk jelasnya, dapat kita bayangkan bahwa gaya eksternal tersebut diberikan langsung pada massa yang digantungkan pada pegas.

Maka kita peroleh persamaan:

$$\sum F = ma$$

$$-ky - c \frac{dy}{dt} + F_0 \cos \omega t = m \frac{d^2 y}{dt^2}$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + c \frac{dy}{dt} + ky = F_0 \cos \omega t$$

Diperoleh solusi

$$y_t = \left( c_1 e^{\frac{-c}{2m}t} + c_2 x e^{\frac{-c}{2m}t} \right) + \frac{4mt \cos(\omega t)}{(-c \pm \sqrt{c^2 - 4km})(F_0 + m)}$$

Pada model tersebut , gerak teredam kritis Bila peredaman diperhitungkan, maka gaya peredam juga berlaku pada massa. Bila bergerak dalam fluida benda akan mendapatkan redaman karena kekentalan fluida. Gaya akibat kekentalan ini sebanding dengan kecepatan benda.

Hal ini ditunjukan pada ketergantungan gerakan (respon) pada koefisien peredam dengan model  $y'' + cy' + 900y = 0$  yang menghasilkan solusi homogen dengan bentuk  $y_h = c_1 e^{\sqrt{899}t} + c_2 x e^{\sqrt{899}t}$  . pada model tersebut memperlihatkan bentuk eksponen ini berarti bahwa gerak teredam kritis bila peredaman diperhitungkan, ini mengakibatkan ketergantungan gerakan atau respon dari shock absorber. Ketergantungan tersebut dapat dilihat pada nilai  $\sqrt{899}t$  yang merupakan bentuk perubahan setiap waktu tergantung gaya redaman yang diberikan.

Pada gambar 3, merupakan gerak peredam kritis. Dimana perubahan viskositas (kekentalan suatu fluida ) sebesar 2 N s/m dengan gaya sebesar 900 m/s ini menunjukkan bahwa ukuran kekentalan suatu fluida yang menunjukkan besar kecilnya gesekan internal fluida berhubungan dengan gaya gesek antar lapisan fluida,

ketika satu lapisan bergerak melewati lapisan yang lain. Pada zat cair, viskositas disebabkan terutama oleh gaya kohesi antar molekul, sedangkan pada gas, viskositas muncul karena tumbukan antar molekul sehingga hal ini mengakibatkan terjadinya kerapatan tumbukan yang diberikan.

Setiap fluida memiliki besar viskositas yang berbeda, Pada gambar 4, Dimana perubahan viskositas (kekentalan suatu fluida ) sebesar  $10 \text{ N s/m}$  dengan gaya sebesar  $900 \text{ m/s}$  ini menunjukkan bahwa fluida yang bersentuhan dengan lempeng ditahan oleh gaya adhesi antara molekul fluida dan molekul lempeng. Dengan demikian, lapisan fluida yang bersentuhan dengan lempeng yang bergerak akan ikut bergerak, sedangkan lapisan fluida yang bersentuhan dengan lempeng diam akan tetap diam sehingga mengakibatkan kurangnya kerapatan tumbukan pada molekul fluida dan molekul lempeng.

Pada gambar 5, merupakan gerak peredam kritis yang mengalami perubahan kerapatan tumbukan. Dimana perubahan viskositas (kekentalan suatu fluida ) sebesar  $50 \text{ N s/m}$  dengan gaya sebesar  $900 \text{ m/s}$ , hal ini terjadi bahwa cairan mempunyai gaya gesek yang lebih besar untuk mengalir dari pada gas. Sehingga cairan mempunyai koefisien viskositas yang lebih besar dari pada gas. Viskositas gas bertambah dengan naiknya temperatur. Koefisien gas pada tekanan tidak terlalu besar, tidak tergantung tekanan, tetapi untuk cairan naik dengan naiknya tegangan sehingga perubahan kekentalannya lebih besar dengan gaya gesek yang lebih besar juga.

## BAB V

### PENUTUP

#### A. KESIMPULAN

Penyelesaian solusi homogen

$$y_h = \left( c_1 e^{\frac{-c}{2m}t} + c_2 x e^{\frac{-c}{2m}t} \right)$$

Penyelesaian solusi partikular dilakukan dengan metode transformasi laplace

$$y_p = \frac{4mt \cos(\omega t)}{(-c \pm \sqrt{c^2 - 4km})(F_0 + m)}$$

Penyelesaian solusi umum (solusi homogen) dilakukan dengan menggabungkan solusi homogen dengan solusi partikular, sehingga diperoleh

$$y_t = \left( c_1 e^{\frac{-c}{2m}t} + c_2 x e^{\frac{-c}{2m}t} \right) + \frac{4mt \cos(\omega t)}{(-c \pm \sqrt{c^2 - 4km})(F_0 + m)}$$

#### B. SARAN

Penyelesaian dari penelitian ini menggunakan metode transformasi laplace, untuk kepentingan penelitian lanjutan dapat dilakukan dengan mengganti beberapa kasus seperti Rangkaian Listrik R, LC, dan RLC baik yang seri atau paralel.



## DAFTAR PUSTAKA

- Abdul Rahman, M.Pd, Drs. dan Nursalam, M.Si. 2007. *Persamaan Diferensial Biasa Teori dan Aplikasi*. Makassar : Tim Penulis
- Amine Khamsi, Mohamed, [http:// www . sosmath . com / differential / equation / byparts / byparts.htm](http://www.sosmath.com/differential/equation/byparts/byparts.htm) / diakses 2-1-2013
- Bondan, Alit. 2007. *Kalkulus Lanjut*, Yogyakarta: Graha Ilmu
- Budi, Nugroho Didit. 2010. *Persamaan Diferensial Biasa dan Aplikasinya*, Yogyakarta: Graha Ilmu
- Departemen Agama RI. 2009. *Al-Qur'an dan Terjemahnya*, Bandung: Bandung: PT. Sigma examedia arkanleema
- Departemen Agama RI 2002, *Alqur'an dan Terjemahannya*, (Jakarta: Lembaga Percetakan Al-Qur'an Raja Fahd dan Kementrian Agama RI).
- Depertemen Agama RI.2005. *Al-Jumanatul' Ali Al-Quran dan terjemahan*, Bandung:Penerbit J-ART.
- Degeng, I Wayan. 2007. *Kalkulus Lanjut Persamaan Diferensial dan Aplikasinya*, Yogyakarta: Graha Ilmu
- El-Mazni, H. Aunur Rafqi. 2006. *Pengantar Studi Ilmu Al-Qur'an*, Jakarta: Pustaka Al-Kausar.
- Frank Ayres, JR. 1999. *Kalkulus Edisi Empat*. Jakarta:Penerbit Erlangga.
- Ferdek Uzula. *Journal Of Theoretical And Applied Mechaniscs."* Modeling And Analysis Of A Twin-Tube Hydraulic Shock Absorber.Vol 2. No.627-638 (2012).
- Haruni Aulia, Mayriska. *Skripsi Transformasi Laplace dari Masalah Nilai Batas pada Persamaan Diferensial Parsial*. <http://www.bagasdika.web.id>. (24 Oktober 2005).
- Lee,Taehee. *Int. Journal of Math. The Representation of Energy Equation by Laplace Transform*. Vol. 8, no. 22, 1093 – 1097(2014).

- Mangara Tua Sitanggang. "Matematika". *Jurnal Aplikasi Fungsi Green Pada Dinamika Sistem Fisis-Massa Pegas Dengan Shock Absorber*. Vol 11. No.2 (Desember 2013).
- Mursita, Danang. 2005. *Matematika Lanjut untuk Perguruan Tinggi*, Bandung: Rekayasa Sains
- N. A. Patil. Vijaya N. Patil. *Global Journal of Science Frontier Research Mathematics and Decision Sciences. Application of Laplace Transform*. Volume 12 Issue 12.(2012).
- P. Buyung, Kosasih. 2006. *Komputasi Numerik Teori dan Aplikasi*, Yogyakarta: Andi
- Prayudi. 2007. *Matematika Teknik Persamaan diferensial, Transformasi Laplace, Deret Fourier*. Yogyakarta: Graha Ilmu
- Purcell, Edwin J. 1986. *Kalkulus dan Geometri Analitis*. Jakarta: Erlangga.
- Quraish, M. Shihap, 2002. *Tafsir Al-Mishbah; Pesan, Kesan Dan Keserasian Al-Qur'an*, Jakarta: Lentera Hati
- R. Murray, Spiegel. 1983. *Matematika Lanjut untuk Para Insinyur dan Ilmuwan Edisi SI*, Jakarta: Erlangga
- R. Murray, Spiegel. 1990. *Teori dan Soal-Soal Transformasi Laplace*, Jakarta: Erlangga
- Setiawan, Agus. 2006. *Pengantar Metode Numerik*, Yogyakarta: Andi
- Wikaria Gazali dan Soedadyatmodjo.2007. *Kalkulus*. Yogyakarta : Graha Ilmu.

Nomor : ST.VI.1/PP.009/202/2016  
Sifat : Penting  
Lamp : -  
Hal : Izin Penelitian  
Untuk Menyusun Skripsi

Makassar, 29 Januari 2016

Kepada Yth.  
Kepala Perpustakaan Umum  
UIN Alauddin Makassar  
Di-  
Tempat

*Assalamu Alaikum Wr. Wb.*

Dengan hormat kami sampaikan, bahwa mahasiswa UIN Alauddin Makassar yang tersebut namanya di bawah ini :

Nama	: Asrijal
NIM	: 60600111075
Semester	: IX
Fakultas	: Sains & Teknologi UIN Alauddin Makassar
Jurusan	: Matematika
Pembimbing	: 1. Irwan, S.Si., M.Si. 2. Try Azisah Nurman, S.Pd., M.Pd.

Bermaksud melakukan penelitian dalam rangka penyusunan Skripsi berjudul **"Aplikasi Metode Transformasi Laplace Pada Dinamika Sistem Fisis-Massa Pegas Dengan Shockber Absorber"** sebagai salah satu syarat penyelesaian Studi akhir Sarjana/S.1

Untuk maksud tersebut kami mengharapkan kiranya kepada mahasiswa yang bersangkutan diberi izin untuk penelitian di **Perpustakaan Umum UIN Alauddin Makassar**

Demikian harapan kami, atas perhatian dan kerjasamanya kami ucapkan terima kasih.



Tembusan:

1. Ketua Prodi/Jurusan Matematika Fak. Sainstek UIN Alauddin
2. Arsip



KEMENTERIAN AGAMA  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI "ALAUDDIN" MAKASSAR  
UPT PUSAT PERPUSTAKAAN

Jln. Sultan Alauddin No. 63 Telp. 864928-864931 (Fax 864923)

SURAT KETERANGAN  
NO: PK/HM.02.1/ 04 /2016

Yang bertanda tangan di bawah ini, menerangkan bahwa :

Nama : Asrijal  
Nim : 60600111075  
Semester : IX ( Sembilan )  
Fakultas : Sains & Teknologi UIN Alauddin Makassar  
Jurusan : Matematika


Yang bersangkutan telah melakukan izin penelitian dari tanggal 15 Desember 2015 s/d Januari 2016 dengan Judul :

**"APLIKASI METODE TRANSFORMASI LAPLACE PADA DINAMIKA SISTEM FISIS-  
MASSA PEGAS DENGAN SHOCKBER ABSORBER"** di UPT pusat Perpustakaan UIN  
Alauddin Makassar"

Demikian Surat Keterangan ini dibuat untuk dapat dipergunakan sebagaimana mestinya.

Samata, 21 Januari 2016

Kepala UPT Pusat Perpustakaan

  
M. Muh. Quraisy Mathar, S.Sos, M.Hum.,  
NIP. 19760316200604 1 001



**KEMENTERIAN AGAMA RI**  
**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI "ALAUDDIN"**  
**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**  
**JURUSAN MATEMATIKA**  
**RUANG BACA**

Jl. Sultan Alauddin No. 36 Gedung D Lt. III Samata, Gowa.

**SURAT KETERANGAN PENGUMPULAN PROPOSAL**

No.: ST/MAT.RB/PP-37/II/2016

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Risnawati Iknas, S.Si., M.Si.  
NIP : 19850830 201503 2 004  
Jabatan : Koordinator Ruang Baca Jurusan Matematika

Memberi surat kepada:

Nama : Asrijal  
NIM : 60600111075  
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi / Matematika  
Program : Srata Satu (S1)  
No. Anggota : 2016-I-268  
Alamat : Jl. Lembu No.35

Telah menyerahkan kepada Ruang Baca Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi berupa proposal skripsi dengan judul "*Aplikasi Metode Transformasi Laplace pada Dinamika Sistem Fisis-Massa Pegas dengan Shock Absorber*"

Demikian surat keterangan ini diberikan untuk digunakan sebagaimana mestinya.

UNIVERSITAS ISLAM Makassar, 14 April 2016

Mengetahui,  
Koordinator Ruang Baca

  
**RUANG BACA**  
Risnawati Iknas S.Si., M.Si.  
NIP. 19850830 201503 2 004





## RIWAYAT HIDUP

**ASRIJAL**, lahir di Watansoppeng, pada tanggal 01 Agustus 1991. Penulis adalah anak pertama dari tiga bersaudara yang merupakan buah cinta kasih dari pasangan Bapak Mustapen dan Marhuna.

Pada tahun 2004 penulis menyelesaikan pendidikan dasar di SD Negeri 131 Saleng, kemudian melanjutkan studi ke sekolah menengah pertama di SLTP Negeri 4 Lilirilau dan tamat pada tahun 2007. Pada tahun 2010, penulis menyelesaikan pendidikan di SMK Negeri 2 Watansoppeng. Pada tahun 2011, penulis di terima di jurusan Matematika, Fakultas Sains & Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Alauddin Makassar dan bergabung di Organisasi Ikatan Mahasiswa Pelajar Soppeng (IMPS)

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI  
**ALAUDDIN**  
M A K A S S A R